

## Un Pizzico di "Computational Thinking"

#### Claudio Mirolo

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche Università di Udine

Laboratorio PLS





#### Sommario

- Un rompicapo
  - informazioni
  - algoritmi
- Un esperimento mentale
  - analisi
  - risposta del matematico
  - modello
  - risposta dello scienziato
- 3 Epilogo





#### Trama

- Un rompicapo
  - informazioni
  - algoritmi
- Un esperimento mentale
  - analisi
  - risposta del matematico
  - modello
  - risposta dello scienziato
- 3 Epilogo

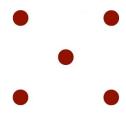






#### Problemino

- Ordinare 5 oggetti per peso crescente, ma....
- unicamente sulla base del confronto di coppie di oggetti

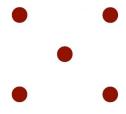






#### Problemino

- Ordinare 5 oggetti per peso crescente, ma...
- unicamente sulla base del confronto di coppie di oggetti





#### Problemino

- Ordinare 5 oggetti per peso crescente, ma...
- unicamente sulla base del confronto di coppie di oggetti





• Quale strategia? (Oggetti A, B, C, D, E)



- Quale strategia? (Oggetti A, B, C, D, E)
- Quanti confronti sono necessari nel peggiore dei casi?



- Quale strategia? (Oggetti A, B, C, D, E)
- Quanti confronti sono necessari nel peggiore dei casi?
- Ci sono strategie migliori da questo punto di vista?



- Quale strategia? (Oggetti A, B, C, D, E)
- Quanti confronti sono necessari nel peggiore dei casi?
- Ci sono strategie migliori da questo punto di vista?
- Si potrebbe fare ancora meglio?



- Quale strategia? (Oggetti A, B, C, D, E)
- Quanti confronti sono necessari nel peggiore dei casi?
- Ci sono strategie migliori da questo punto di vista?
- Si potrebbe fare ancora meglio?
- C'è un limite ineludibile?



- Quale strategia? (Oggetti A, B, C, D, E)
- Quanti confronti sono necessari nel peggiore dei casi?
- Ci sono strategie migliori da questo punto di vista?
- Si potrebbe fare ancora meglio?
- C'è un limite ineludibile?



• In quanti modi diversi si possono mescolare 5 oggetti?



- In quanti modi diversi si possono mescolare 5 oggetti?
- Quanti sono i potenziali "percorsi" di ordinamento diversi?



- In quanti modi diversi si possono mescolare 5 oggetti?
- Quanti sono i potenziali "percorsi" di ordinamento diversi?
- Che informazione rivela un singolo confronto?



- In quanti modi diversi si possono mescolare 5 oggetti?
- Quanti sono i potenziali "percorsi" di ordinamento diversi?
- Che informazione rivela un singolo confronto?
- Che relazione fra informazione e numero di casi possibili?



- In quanti modi diversi si possono mescolare 5 oggetti?
- Quanti sono i potenziali "percorsi" di ordinamento diversi?
- Che informazione rivela un singolo confronto?
- Che relazione fra informazione e numero di casi possibili?
- Nel peggiore dei casi, qual è il numero minimo di confronti?



- In quanti modi diversi si possono mescolare 5 oggetti?
- Quanti sono i potenziali "percorsi" di ordinamento diversi?
- Che informazione rivela un singolo confronto?
- Che relazione fra informazione e numero di casi possibili?
- Nel peggiore dei casi, qual è il numero minimo di confronti?





- È necessario distinguere 5! = 120 casi possibili
- Ogni confronto determina una bipartizione di casi
- Per bipartizioni *bilanciate* occorrono almeno 7 confronti:  $2^7 = 128 \ge 120$
- Altrimenti si può incappare in situazioni più sfortunate





- È necessario distinguere 5! = 120 casi possibili
- Ogni confronto determina una bipartizione di casi
- Per bipartizioni *bilanciate* occorrono almeno 7 confronti:  $2^7 = 128 \ge 120$
- Altrimenti si può incappare in situazioni più sfortunate





- È necessario distinguere 5! = 120 casi possibili
- Ogni confronto determina una bipartizione di casi
- Per bipartizioni *bilanciate* occorrono almeno 7 confronti:  $2^7 = 128 \ge 120$
- Altrimenti si può incappare in situazioni più sfortunate





- È necessario distinguere 5! = 120 casi possibili
- Ogni confronto determina una bipartizione di casi
- Per bipartizioni *bilanciate* occorrono almeno 7 confronti:  $2^7 = 128 \ge 120$
- Altrimenti si può incappare in situazioni più sfortunate





- È necessario distinguere 5! = 120 casi possibili
- Ogni confronto determina una bipartizione di casi
- Per bipartizioni *bilanciate* occorrono almeno 7 confronti:  $2^7 = 128 \ge 120$
- Altrimenti si può incappare in situazioni più sfortunate





### Algoritmi

Non più di 7 confronti...

• Questo obiettivo è perseguibile?

Esiste, cioè, una strategia ottimale?





### Algoritmi

Non più di 7 confronti...

• Questo obiettivo è perseguibile?

Esiste, cioè, una strategia ottimale?





### Algoritmi

Non più di 7 confronti...

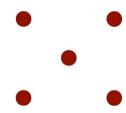
• Questo obiettivo è perseguibile?

• Esiste, cioè, una strategia ottimale?



#### Esiste un algoritmo del genere?

Dopo 2 confronti...







Esiste un algoritmo del genere?

Dopo 2 confronti...



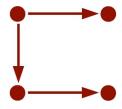






Esiste un algoritmo del genere?

Dopo 3 confronti...

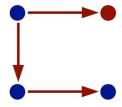






Esiste un algoritmo del genere?

Dopo 3 confronti...

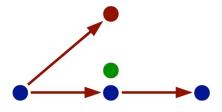






Esiste un algoritmo del genere?

Dopo 3 confronti... (arriva l'ultimo elemento)

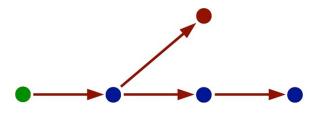






Esiste un algoritmo del genere?

Dopo 5 confronti... una eventualità...

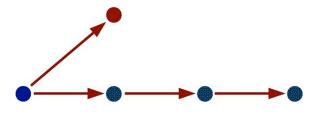






Esiste un algoritmo del genere?

Dopo 5 confronti... o quelle alternative...

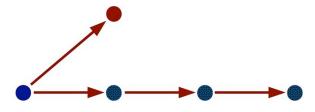






Esiste un algoritmo del genere?

Dopo 5 confronti... quanti confronti ancora?

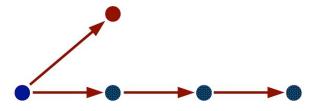






Esiste un algoritmo del genere?

Dopo 5 confronti... quanti confronti ancora?







# Algoritmi e Informazioni

Casi possibili: 120











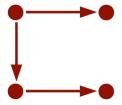
Ripartizione dei casi possibili (per simmetria):  $60 \rightarrow 30$ 



$$\bullet \longrightarrow \bullet$$



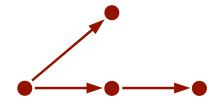
Ripartizione dei casi possibili (per simmetria): 15







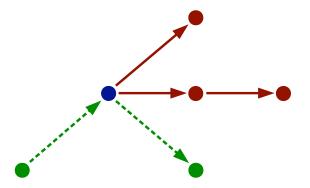
Ripartizione dei (15) casi possibili:





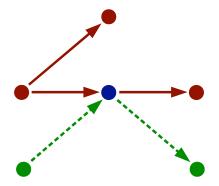


Ripartizione dei (15) casi possibili: 3 | 12 (!)





Ripartizione dei (15) casi possibili: 7 | 8





#### Rivelare informazioni richiede risorse!

- Spazio per annotazioni
- Tempo di elaborazione





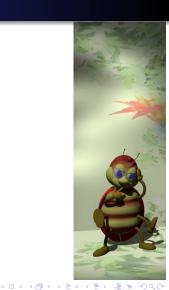
Rivelare informazioni richiede risorse!

- Spazio per annotazioni
- Tempo di elaborazione



#### Trama

- Un rompicapo
  - informazioni
  - algoritmi
- Un esperimento mentale
  - analisi
  - risposta del matematico
  - modello
  - risposta dello scienziato
- 3 Epilogo





# Gedankenexperiment: Formica sul nastro elastico...







## Gedankenexperiment: Formica sul nastro elastico...













analisi risposta del matematico modello risposta dello scienziato

























































## Ce la farà a raggiungere l'altro capo?





- La formichina percorre 1 cm in  $10^{-1}$  sec
- Il nastro elastico a riposo misura 1 m
- Ad ogni avanzamento di 1 cm della formichina corrisponde un allungamento di 1 m del nastro
- Riuscirà la formica a spostarsi da un estremo all'altro?





- La formichina percorre 1 cm in  $10^{-1}$  sec
- Il nastro elastico a riposo misura 1 m
- Ad ogni avanzamento di 1 cm della formichina corrisponde un allungamento di 1 m del nastro
- Riuscirà la formica a spostarsi da un estremo all'altro?





- La formichina percorre 1 cm in  $10^{-1}$  sec
- Il nastro elastico a riposo misura 1 m
- Ad ogni avanzamento di 1 cm della formichina corrisponde un allungamento di 1 m del nastro
- Riuscirà la formica a spostarsi da un estremo all'altro?





- La formichina percorre 1 *cm* in 10<sup>-1</sup> *sec*
- Il nastro elastico a riposo misura 1 m
- Ad ogni avanzamento di 1 cm della formichina corrisponde un allungamento di 1 m del nastro
- Riuscirà la formica a spostarsi da un estremo all'altro?



#### analisi risposta del matematico modello



### Analisi



1 cm







## Analisi



1 cm







## Analisi



1 cm



#### analisi risposta del matematico modello risposta dello scienziato



## Analisi: Proporzioni...



1 +  $\frac{1}{2}$  cm stirato



## Analisi: Proporzioni...



1 +  $\frac{1}{2}$  cm stirato



## Analisi: Proporzioni...



1 +  $\frac{1}{2}$  cm stirato

# analisi risposta del matematico modello risposta dello scienziato



## Analisi: Proporzioni...



1 + 
$$\frac{1}{2}$$
 +  $\frac{1}{3}$  cm stirato





## Analisi: Proporzioni...



1 + 
$$\frac{1}{2}$$
 +  $\frac{1}{3}$  cm stirato







1 + 
$$\frac{1}{2}$$
 +  $\frac{1}{3}$  cm stirato



#### analisi risposta del matematico modello risposta dello scienziato





$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$
 cm stirato



# analisi risposta del matematico modello risposta dello scienziato





$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$
 cm stirato





## Analisi: Proporzioni...



$$1 + \frac{1}{2}$$

cm stirato







$$1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}$$



• 
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$
 diverge!

• Esiste k (cm effettivi) tale che  $H(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{k} \ge n$  (cm stirati

La formichina è in grado di percorrere tutto il nastro





• 
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$
 diverge!

• Esiste k (cm effettivi) tale che  $H(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{k} \ge n$  (cm stiration)

La formichina è in grado di percorrere tutto il nastro





• 
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$
 diverge!

• Esiste k (cm effettivi) tale che  $H(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{k} \ge n$  (cm stirati)





• 
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$
 diverge!

• Esiste k (cm effettivi) tale che  $H(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{k} \ge n$  (cm stirati)

La formichina è in grado di percorrere tutto il nastro



## Un modello (informatico)

```
public static long antJogging( int n ) {
  long k = 1;
  double h = 1.0;
  while (h < n) {
   k = k + 1;
    h = h + 1.0 / k;
  return k;
```



• ... antJogging(100) ... ?

 Che relazione c'è fra i tempi di calcolo di antJogging (n+1) e antJogging (n)

HarmonioSeries java

• Quanto impiega la formica per coprire 1 cm stirato in più?



```
• ... antJogging(100) ... ?
```

 Che relazione c'è fra i tempi di calcolo di antJogging (n+1) e antJogging (n)

HarmonicSeries.java

• Quanto impiega la formica per coprire 1 cm stirato in più?



```
• ... antJogging(100) ... ?
```

Che relazione c'è fra i tempi di calcolo di

```
antJogging(n+1) e antJogging(n)

(HarmonicSeries.java)
```

• Quanto impiega la formica per coprire 1 cm stirato in più?



- ... antJogging(5)...
- ... antJogging(6)...
- ... antJogging(7) ...
- ... antJogging(8)...
- HarmonicSeries.java
- 5 cm in  $83 \cdot 10^{-1}$  sec = 8.3 sec
- 100 cm in (molto) più di 8.3 · 2 · 2 · 2 · . . . sec



- ... antJogging(5) ...
- ... antJogging(6) ...
- ... antJogging(7) ...
- ... antJogging(8)...
- HarmonicSeries.java
- 5 cm in  $83 \cdot 10^{-1}$  sec = 8.3 sec
- 100 cm in (molto) più di 8.3 · 2 · 2 · 2 · . . . sec



- ... antJogging(5)...
- ... antJogging(6) ...
- ... antJogging(7) ...
- ... antJogging(8) ...
- HarmonicSeries.java
- 5 cm in  $83 \cdot 10^{-1}$  sec = 8.3 sec
- 100 cm in (molto) più di 8.3 · 2 · 2 · 2 · . . . sec



- ... antJogging(5) ...
- ... antJogging(6) ...
- ... antJogging(7) ...
- ... antJogging(8) ...
- HarmonicSeries.java
- 5 cm in  $83 \cdot 10^{-1}$  sec = 8.3 sec
- 100 cm in (molto) più di 8.3 · 2 · 2 · 2 · . . . sec



- ... antJogging(5)...
- ... antJogging(6) ...
- ... antJogging(7) ...
- ... antJogging(8) ...
- HarmonicSeries.java
- 5 cm in  $83 \cdot 10^{-1}$  sec = 8.3 sec
- 100 *cm* in (molto) più di 8.3 · 2 · 2 · 2 · . . . *sec*



```
• ... antJogging(5) ...
  ... antJogging(6) ...
  \dots antJogging (7) \dots
  ... antJogging(8) ...
         HarmonicSeries.java
• 5 cm in 83 \cdot 10^{-1} sec = 8.3 sec
• 100 cm in (molto) più di 8.3 · 2 · 2 · 2 · . . . sec
```



```
• ... antJogging(5) ...
  ... antJogging(6) ...
  \dots antJogging (7) \dots
  ... antJogging(8) ...
         HarmonicSeries.java
• 5 cm in 83 \cdot 10^{-1} sec = 8.3 sec
• 100 cm in (molto) più di 8.3 · 2 · 2 · 2 · . . . sec
```



- tempo
- A quanti anni corrisponde?
- A quanti miliardi di anni?
- Qual è la vita stimata dell'universo?
- E quanto impiegherebbe un computer?
   (supponiamo: una somma in 10<sup>-10</sup> sec
- Risposta:
- Di conseguenza...





- tempo ?
- A quanti anni corrisponde?
- A quanti miliardi di anni?
- Qual è la vita stimata dell'universo?
- E quanto impiegherebbe un computer? (supponiamo: una somma in 10<sup>-10</sup> sec)
- Risposta:
- Di conseguenza...





- tempo  $\gg$  3.3 · 10<sup>29</sup> sec
- A quanti anni corrisponde?
- A quanti miliardi di anni?
- Qual è la vita stimata dell'universo?
- E quanto impiegherebbe un computer?
   (supponiamo: una somma in 10<sup>-10</sup> sec
- Risposta:
- Di conseguenza...





- tempo  $\gg$  3.3 · 10<sup>29</sup> sec
- A quanti anni corrisponde?
- A quanti miliardi di anni?
- Qual è la vita stimata dell'universo?
- E quanto impiegherebbe un computer? (supponiamo: una somma in 10<sup>-10</sup> sec)
- Risposta:
- Di conseguenza...





- tempo  $\gg$  3.3 · 10<sup>29</sup> sec
- A quanti anni corrisponde?
- A quanti miliardi di anni?
- Qual è la vita stimata dell'universo?
- E quanto impiegherebbe un computer? (supponiamo: una somma in 10<sup>-10</sup> sec)
- Risposta:
- Di conseguenza...





- tempo  $\gg$  3.3 · 10<sup>29</sup> sec
- A quanti anni corrisponde?
- A quanti miliardi di anni?
- Qual è la vita stimata dell'universo?
- E quanto impiegherebbe un computer? (supponiamo: una somma in 10<sup>-10</sup> sec)
- Risposta:
- Di conseguenza...





- tempo  $\gg$  3.3 · 10<sup>29</sup> sec
- A quanti anni corrisponde?
- A quanti miliardi di anni?
- Qual è la vita stimata dell'universo?
- E quanto impiegherebbe un computer? (supponiamo: una somma in 10<sup>-10</sup> sec)
- Risposta: (molto) più di 10.000 miliardi di anni
- Di conseguenza...





- Le considerazioni riguardo il livello di "impraticabilità" del programma già per input numerici piuttosto piccoli si basano su conoscenze scientifiche (p. es. teorie cosmologiche)
- In relazione ad una analisi matematica preliminare, il rilievo dei tempi di calcolo consente di verificare sperimentalmente i riusultati dell'analisi (teoria)
- Prescindendo dall'analisi matematica,
   la sperimentazione consente di caratterizzare
   empiricamente l'andamento dei tempi di calcolo





- Le considerazioni riguardo il livello di "impraticabilità" del programma già per input numerici piuttosto piccoli si basano su conoscenze scientifiche (p. es. teorie cosmologiche)
- In relazione ad una analisi matematica preliminare, il rilievo dei tempi di calcolo consente di verificare sperimentalmente i riusultati dell'analisi (teoria)
- Prescindendo dall'analisi matematica, la sperimentazione consente di caratterizzare empiricamente l'andamento dei tempi di calcolo





- Le considerazioni riguardo il livello di "impraticabilità" del programma già per input numerici piuttosto piccoli si basano su conoscenze scientifiche (p. es. teorie cosmologiche)
- In relazione ad una analisi matematica preliminare, il rilievo dei tempi di calcolo consente di verificare sperimentalmente i riusultati dell'analisi (teoria)
- Prescindendo dall'analisi matematica,
   la sperimentazione consente di caratterizzare
   empiricamente l'andamento dei tempi di calcolo





- Le considerazioni riguardo il livello di "impraticabilità" del programma già per input numerici piuttosto piccoli si basano su conoscenze scientifiche
   (p. es. teorie cosmologiche)
- In relazione ad una analisi matematica preliminare, il rilievo dei tempi di calcolo consente di verificare sperimentalmente i riusultati dell'analisi (teoria)
- Prescindendo dall'analisi matematica, la sperimentazione consente di caratterizzare empiricamente l'andamento dei tempi di calcolo





#### Trama

- Un rompicapo
  - informazioni
  - algoritmi
- Un esperimento mentale
  - analisi
  - risposta del matematico
  - modello
  - risposta dello scienziato
- 3 Epilogo





## Tempo di calcolo

• Il tempo di elaborazione è una risorsa...

...che non sempre si può trascurare!





## Tempo di calcolo

Il tempo di elaborazione è una risorsa...

...che non sempre si può trascurare!





### Domandina...

Qual è la risposta di un ingegnere?

Risposta:





#### Domandina...

Qual è la risposta di un ingegnere?

Risposta:

prima che la formica percorra 10 cm si strappa il nastro elastico





• 
$$H(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{k} \approx \gamma \cdot \log(k)$$

• 
$$H(k') = H(k) + 1 \implies k' \approx 2.7 \cdot k$$

- H(k) è la distanza in centimetri "stirati" lungo il nastro
- k è la distanza in centimetri percorsa dalla formichina



• 
$$H(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{k} \approx \gamma \cdot \log(k)$$

• 
$$H(k') = H(k) + 1 \implies k' \approx 2.7 \cdot k$$

- H(k) è la distanza in centimetri "stirati" lungo il nastro
- k è la distanza in centimetri percorsa dalla formichina



• 
$$H(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{k} \approx \gamma \cdot \log(k)$$

$$\bullet \ H(k') = H(k) + 1 \Longrightarrow k' \approx 2.7 \cdot k$$

- H(k) è la distanza in centimetri "stirati" lungo il nastro
- k è la distanza in centimetri percorsa dalla formichina



• 
$$H(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{k} \approx \gamma \cdot \log(k)$$

• 
$$H(k') = H(k) + 1 \implies k' \approx 2.7 \cdot k$$

- H(k) è la distanza in centimetri "stirati" lungo il nastro
- k è la distanza in centimetri percorsa dalla formichina



• 
$$H(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{k} \approx \gamma \cdot \log(k)$$

• 
$$H(k') = H(k) + 1 \implies k' \approx 2.7 \cdot k$$

- H(k) è la distanza in centimetri "stirati" lungo il nastro
- k è la distanza in centimetri percorsa dalla formichina



## Elogio della lentezza

Come cresce lentamente il logaritmo!

Importante nell'analisi dei costi computazionali

•  $n \cdot log(n)$ : crescita poco più che lineare





## Elogio della lentezza

Come cresce lentamente il logaritmo!

Importante nell'analisi dei costi computazionali

•  $n \cdot log(n)$ : crescita poco più che lineare





## Elogio della lentezza

Come cresce lentamente il logaritmo!

Importante nell'analisi dei costi computazionali

•  $n \cdot log(n)$ : crescita poco più che lineare

