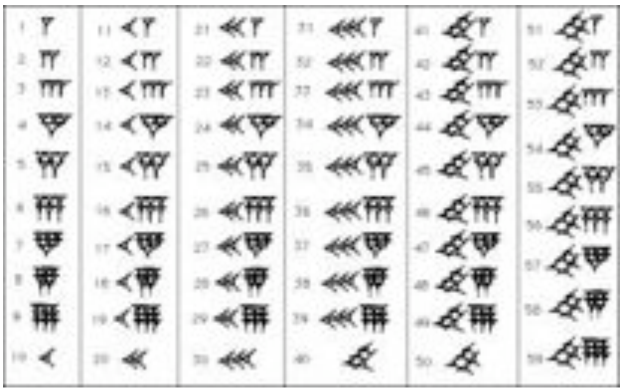
Il sistema di numerazione posizionale babilonese

Come abbiamo visto, in un sistema additivo (puro) l'ordine dei simboli numerici è irrilevante e non porta con sé alcuna informazione: i Babilonesi furono probabilmente i primi ad ideare un sistema di numerazione posizionale, capace di sfruttare la disposizione dei simboli per esprimere l'informazione numerica. La civiltà babilonese si insediò nella regione tra il Tigri e l'Eufrate, nota come Mesopotamia, abitata a partire già dal 3500 a.C., anche se in realtà bisogna dire che le popolazioni (Sumeri, Babilonesi, Assiri, Caldei, ecc.) che si sono succedute nel tempo in questa area sono diverse. Sebbene la matematica di questa regione venga presentata in forma unitaria, occorre tener presente che si è evoluta nel tempo, come documentano le numerose tavolette di argilla ivi trovate; proprio l'uso di questo tipo di supporto, legato al terreno argilloso, ha favorito molto più che altrove la conservazione nel tempo dei documenti. Solitamente le tavolette venivano scritte (in cuneiforme) dallo scriba con uno stelo di giunco tagliato obliquamente (calamo) quando l'argilla era ancora fresca e poi venivano indurite con il calore del sole o la cottura. È bene ricordare che nelle società arcaiche gli scribi non erano solo incaricati di registrare sulle tavolette informazioni di vario genere, ma costituivano una classe colta capace di applicare conoscenze indispensabili per tutta la società tramandandole da una generazione all'altra. La maggior parte delle tavolette a noi pervenute data all'incirca tra il 1600 e il 1800 (dinastia Hammurabi) e nonostante la percentuale di quelle dedicate alla matematica sia piccola rispetto alla totalità, nel complesso, ci consentono di formare un quadro della matematica babilonese più approfondito di quella egizia. Nelle tavolette babilonesi si ritrovano numerosi esempi di problemi risolti con metodi ingegnosi, che in alcuni casi ricordano le tecniche algebriche moderne a parte la mancanza di una notazione simbolica. Altre tavolette contengono tavole numeriche di vario genere utili per lo svolgimento del calcolo e altre ancora registrano semplicemente calcoli numerici. Come nel caso dell'Egitto, anche qui non ci è giunta alcuna opera che contenga una presentazione organica della matematica anche se alcune tavolette si configurano come antologie di problemi con un certo grado di organizzazione; la spiegazione di tutto questo è legata semplicemente al fatto che la maggior parte dei ritrovamenti rappresentano esercitazioni scolastiche dei futuri scribi o sono comunque legate all'insegnamento di tecniche di calcolo necessarie all'amministrazione dei beni; non sappiamo dire se ci sono stati "matematici" che abbiano realizzato testi più avanzati.

Da questi materiali appare chiaramente che gli scribi erano in grado di risolvere problemi algebrici di primo e secondo grado e disponevano di tecniche per risolvere perfino alcune equazioni particolari di grado superiore. Anche la geometria, benché appaia trattata meno approfonditamente, includeva la conoscenza delle formule indispensabili per trattare problemi concernenti figure piane e solide elementari. In alcuni ritrovamenti (una decina di tavolette) è testimoniata anche la conoscenza del teorema di Pitagora, anche se il teorema non compare mai formulato in modo generale ed è molto dubbio il fatto che i Babilonesi disponessero di una qualche dimostrazione.

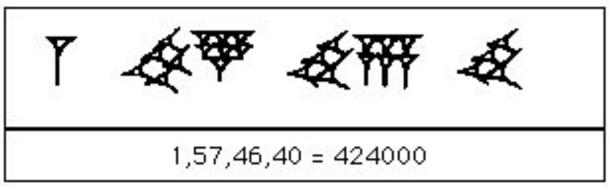
Il sistema di numerazione babilonese più noto risulta abbastanza singolare per due motivi: da un lato è un sistema a base 60 e non decimale e dall'altro lato è un sistema di tipo posizionale che in qualche modo anticipa il moderno sistema di numerazione. Esso derivava da quello additivo impiegato dai Sumeri (le registrazioni contabili più antiche risalgono circa al 3200-3100 a.C.), che era a base mista (10 e 60) e poi dagli Accadi (le tavolette più vecchie oggi disponibili con il sistema sessagesimale datano attorno al 2100-2000 a.C.), da cui venne ereditata la base 60, ma i Babilonesi vi aggiunsero l'idea del sistema posizionale, che, a quanto ne sappiamo, costituisce il primo esempio storico. I motivi che portarono ad adottare questa base e non quella più consueta a base 10 non sono chiari ed esistono a tale proposito varie ipotesi; alcuni studiosi legano questa scelta a motivi di tipo astronomico, altri a motivi di semplicità di calcolo, grazie al maggior numero di divisori della base 60 che faciliterebbe le operazioni di divisione, altri ancora spiegano la scelta con l'impiego di particolari sistemi di misurazione. Comunque ancora oggi portiamo traccia dell'uso della base 60 nei nostri sistemi di numerazione per la misura del tempo (con l'uso dei minuti e secondi) e degli angoli (frazioni del grado). I Greci infatti adattarono il sistema sessagesimale babilonese al loro sistema alfabetico nella misura degli angoli e in campo astronomico, sistema che venne poi trasmesso al mondo occidentale attraverso la cultura latina e araba.

Il fatto che la base del sistema fosse 60, non deve far concludere che essi utilizzassero 60 cifre in stretta analogia con il nostro attuale sistema. Le "cifre" del sistema sessagesimale (da 1 a 59) erano strutturate e in particolare, venivano scritte mediante un meccanismo additivo basato sull'uso di soli due simboli, uno per le unità e uno per le decine, come si può vedere nella seguente figura.



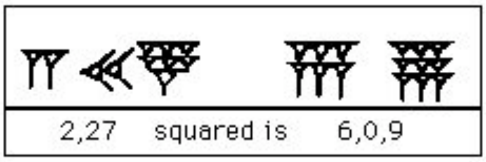
Here are the 59 symbols built from these two symbols.

Nel sistema sessagesimale babilonese, la scrittura del numero intero sessagesimale (1,57,46,40), dove la virgola viene usata convenzionalmente per separare le cifre sessagesimali, rappresentava il numero $1 \times 60^3 + 57 \times 60^2 + 46 \times 60 + 40$, cioè nel nostro sistema 424000. Più precisamente i Babilonesi scrivevano questo numero nella forma:



Here is 1,57,46,40 in Babylonian numerals.

Purtroppo, i Babilonesi non avevano un simbolo per indicare lo zero e ciò poteva creare ambiguità nell'interpretazione dei numeri: il numero sessagesimale (1,1), poteva essere confuso con il numero sessagesimale (0,2). Al posto dello zero, i Babilonesi potevano lasciare un certo spazio tra le cifre dei numeri, ma ciò creava comunque problemi per distinguere numeri come 1, o 60, o 3600. Un esempio di questo tipo è presente in una tavoletta conservata al Louvre (tavoletta AO 17264) contenente il quadrato di 147 (cioè 2,27 in sessagesimale) con il risultato 21609 (cioè 6,0,9) :



Here is the Babylonian example of 2,27 squared

Di solito la distinzione tra questi numeri era lasciata al contesto del problema; successivamente (ma molto tardi), per rimediare al problema dell'ambiguità, i Babilonesi cominciarono attorno al 400 a.C. a mettere due segni come le nostre doppie virgolette per segnare il posto in cui noi oggi mettiamo lo zero. In questo modo, 2106 veniva scritto come 21 " 6. Il ruolo assegnato a queste virgolette era solo quello di separare le cifre e non fu compreso che tale simbolo poteva essere trattato come anch'esso come un vero numero. Se i Babilonesi avessero perfezionato questa idea introducendo l'uso dello zero, avrebbero anticipato gli Indiani di oltre mille anni e probabilmente i vantaggi di un tale sistema sarebbero stati raccolti dalla civiltà greco-romana, che utilizzarono comunque il sistema babilonese.

Ci si può chiedere se i Babilonesi fossero coscienti del fatto che i numeri possono essere rappresentati anche mediante altri sistemi numerici: la risposta sembra positiva come testimoniato indirettamente da una tavoletta di argilla, MS 3970, che riporta una tavola numerica incompleta di conversione tra multipli di cento e numeri espressi in forma sessagesimale: 11 40 = 700, 13 20 = 800, ecc.

Per quanto riguarda le operazioni con questo sistema di numerazione non è facile dire quali fossero gli algoritmi di calcolo a causa della scarsità dei documenti ritrovati. Nessuna tavoletta cuneiforme mostra esempi di addizioni e sottrazioni anche se è probabile che si lavorasse incolonnando le cifre dei numeri e procedendo come oggi con l'unica differenza della base 60. Anche nel caso delle altre operazioni non è chiaro quali fossero gli algoritmi specifici di calcolo anche se è certo, come diremo in un altro capitolo, i Babilonesi facessero un uso esteso di tavole numeriche di vario genere per facilitare i calcoli.

Il calcolo in virgola mobile dei babilonesi. Il sistema sessagesimale babilonese, grazie al meccanismo posizionale, permetteva di rappresentare in modo efficace sia numeri interi che frazionari. In particolari, i numeri frazionari venivano rappresentati in modo omogeneo a quello usato per i numeri interi per semplice estensione del sistema base facendo ricorso alle frazioni sessagesimali: 1/60, 1/3600, ecc. Ad esempio, il numero 5;7,30 (dove per nostra comodità il punto e virgola separa la parte intera da quella frazionaria e la virgola separa le cifre sessagesimali) rappresenta il numero $5 + {}^{7}/_{60} + {}^{30}/_{3600}$, cioè nella nostra notazione $5 + {}^{1}/_{8}$. Un esempio più complesso è contenuto nella tavoletta YBC 7289 contenente il numero 1;24,51,10 che rappresentava $1 \times 60^0 + {}^{24}/_{60} + {}^{51}/_{60^2} + {}^{10}/_{60^3}$, nella nostra notazione $1 + {}^{8947}/_{21600}$, ossia 1,41421296…, approssimazione fra l'altro molto buona del valore di $\sqrt{2}$.

Il grande vantaggio dal punto di vista computazionale di una sistema frazionario di questo tipo è quello di poter eseguire le operazioni aritmetiche sulla parte non intera con gli stessi algoritmi di calcolo impiegati per i numeri interi: è ciò che avviene oggi con i numeri decimali con la virgola; nelle frazioni egizie o cinesi le operazioni richiedono invece appositi algoritmi. I calcoli di divisioni potevano essere realizzati facilmente facendo ricorso al concetto di reciproco di un numero. Ad esempio volendo dividere il numero 5;7,30 per 12, il calcolo poteva essere svolto moltiplicando il numero 5;7,30 per 5, che costituisce il reciproco di 12 nel sistema a base 60 e poi dividendo il risultato per 60: ossia 5;7,30 × 5 = 25;37,30; la divisione per 60 equivale semplicemente a "spostare la virgola" a sinistra di un posto: il risultato finale è 0;25,37,30. Gli spostamenti a destra o a sinistra della "virgola" ovviamente corrispondono al nostro modo di operare quando moltiplichiamo o dividiamo per potenze di 10. I Babilonesi, come vedremo in un altro capitolo, avevano a disposizione tavole numeriche precompilate per eseguire velocemente sia il calcolo del reciproco che le moltiplicazioni.

Il problema più grosso nella notazione babilonese era la mancanza di meccanismo esplicito per separare chiaramente la parte intera da quella frazionaria, cioè di un segno che svolga il ruolo del punto e virgola ";" da noi artificialmente introdotto negli esempi sopra riportati. Pertanto la scrittura  poteva indicare 13, o 13 × 60, o 13 ×1/60, 13 × 1/3600, ecc. La corretta interpretazione dei numeri doveva essere riconosciuta a partire dal contesto pratico, ma ciò rendeva particolarmente ambigua l'interpretazione dei numeri, tant'è che gli esperti di matematica mesopotamica spesso sono costretti ad avanzare ipotesi diverse sulle possibili interpretazione delle tavolette ritrovate. Un altro problema era legato alla mancanza dello zero come cifra sessagesimale per indicare i posti "vuoti", problema che abbiamo visto già affliggeva la rappresentazione degli interi.

Il sistema di numerazione babilonese aveva un ulteriore inconveniente di non poter rappresentare in modo esatto tutte le quantità frazionarie, cioè di tutte le frazioni i cui denominatori non sono divisori esatti di 60, come ad esempio la frazione 3/7; in questo caso era necessario ricorrere ad una rappresentazione approssimata, come d'altra parte accade oggi con la rappresentazione decimale dei numeri con la virgola. A questo proposito, i Babilonesi distinguevano i "*numeri regolari*" il cui reciproco può essere rappresentato in modo completo, da quelli "*irregolari*" il cui reciproco può essere solo approssimato mediante le frazioni sessagesimali.

Comunque il vantaggio computazionale di questo sistema spinse i Greci, i Romani e anche i Musulmani ad adattarlo nei calcoli scientifici e in particolare nell'ambito astronomico, come si riscontra, ad esempio, nell'*Almagesto* di Tolomeo.

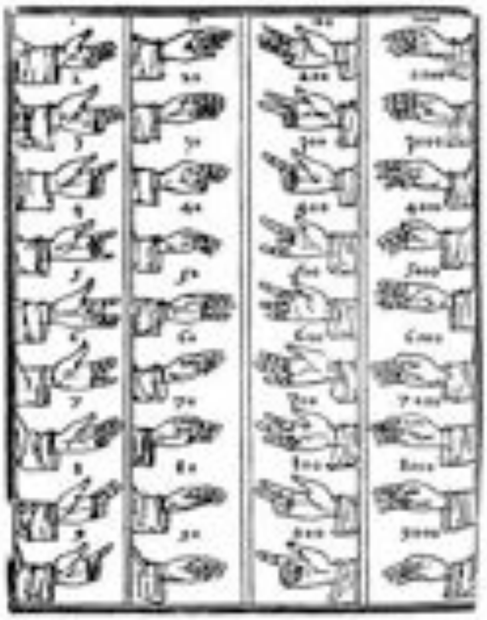
Strumenti primitivi per la rappresentazione dei numeri.

Gli strumenti considerati in questa sezione non sono veri calcolatori in grado di eseguire autonomamente calcoli matematici, ma hanno comunque dato un aiuto importante all'uomo nella rappresentazione dei numeri ponendo le premesse necessarie per giungere al calcolo automatico.

Dita della mano per contare.

Mano. Le dita della mano sono il più semplice dispositivo per contare e furono molto probabilmente anche il primo strumento utilizzato dall'uomo preistorico. Questo è ancora lo strumento preferito dal bambino che impara a contare. L'importanza di questo strumento è quella di aiutare il bimbo a mediare tra i numeri come astrazioni matematiche e gli oggetti concreti. L'uso di questo "strumento" ha lasciato una traccia importante e ben visibile nella rappresentazione dei numeri. Infatti, il numero della dita delle mani ha condizionato la scelta delle base decimale attualmente utilizzata nella rappresentazione dei numeri.

Evidentemente l'uso delle mani per contare presenta diverse limitazioni: difficoltà a rappresentare direttamente numeri più grandi di dieci, difficoltà a rappresentare più numeri contemporaneamente sulle mani, impossibilità di conservare nel tempo i dati numerici. Gli antichi e poi i contabili nel medioevo utilizzavano particolari metodi estesi per rappresentare numeri anche più grandi di dieci.



Rappresentazione di numeri secondo una tecnica rinascimentale (Luca Pacioli, Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proporzionalità, Venezia 1494).

Gettoni. L'impiego di un insieme di *gettoni*, cioè sassolini, o conchiglie, o piccoli elementi in creta, ecc. per rappresentare i numeri ha caratterizzato il modo di calcolare nelle civiltà più antiche. Il metodo deriva dall'uso della dita per contare e in un certo senso ne costituisce un ampliamento: invece della dita vengono utilizzati sassolini o piccoli manufatti in argilla con il vantaggio di poter gestire facilmente numeri più grandi di 10. In alcune civiltà primitive venivano utilizzati come elementi di conteggio oggetti di forma diversa a seconda del tipo di elementi da contare. Forse, il livello di astrazione dei numeri non era ancora un fatto compiutamente acquisito e il concetto di numero non era ancora ben separato dal tipo di elementi contati. Ad esempio, in Mesopotamia, più di 5.000 anni fa si utilizzavano piccoli elementi in creta: i coni per contare piccole quantità di grano, le sfere per grandi quantità di grano, gli ovuli per l'olio e così via.

Inizialmente, il metodo si limitava ad una corrispondenza uno a uno tra i sassolini e gli oggetti da contare, ma poi per facilitare il conteggio di numeri grandi, il metodo fu perfezionato introducendo l'idea di rappresentare una quantità prestabilita di elementi (cinquina, diecina, ecc.) con un singolo gettone di forma diversa. Questo espediente portò probabilmente al concetto di sistemi numerici fondati su qualche *base* con l'introduzione di opportuni multipli dell'unità: in questo caso, un sassolino di forma diversa assume un significato simbolico e denota un gruppo di elementi.

Gruppo di sassolini per rappresentare il numero 8.

Gettoni babilonesi per rappresentare diverse quantità

Una bulla con i gettoni in essa contenuti.

Taglie. L'uso dei gettoni si rivela conveniente per contare ed operare con i numeri ma risulta meno adatto per conservare nel tempo dati numerici poiché i sassolini possono essere facilmente persi. Un metodo molto semplice che permette di ovviare a questo inconveniente è quello di registrare i numeri su un bastone o, nei ritrovamenti più antichi, su un osso con un certo insieme di incisioni.

Anche nell'uso delle taglie troviamo ben presto il concetto di base di un sistema numerico: al fine di contare più facilmente le incisioni venivano utilizzate tacche di forma diversa che rappresentavano opportuni multipli dell'unità (ad esempio, cinquine, decine, dozzine, ecc).

Una delle utilizzazioni più note delle taglie è stata fatta dal Ministero delle Finanze Britannico tra il tredicesimo e il diciannovesimo secolo: ogni debito o pagamento veniva registrato su un bastone di olmo per mezzo di tacche particolari intagliate sui lati: il bastone veniva poi diviso in due parti nel senso della lunghezza e una parte rimaneva al Ministero mentre l'altra parte andava al contraente. Nonostante questa tecnica sia stata adottata da quasi tutte le civiltà, nella maggior parte delle culture moderne non resta quasi alcuna traccia dell'importanza rivestita da questo metodo di registrazione.

Ricostruzione di una taglia utilizzata dai pastori dalmati. La taglia rappresenta il numero 11. Per contare più facilmente le incisioni, la quinta e la decima incisione sono diverse dalle altre.

(a) taglia per indicare il numero 44.

(b) taglia per indicare il numero 190.

(c) taglia per indicare il numero 277.

Ricostruzione di taglie utilizzate nel passato in Austria per indicare le quantità di latte.

Cordicella annodata per rappresentare il numero 5.

Cordicelle annodate. Un altro metodo molto antico per registrare numeri è rappresentato dall'impiego di cordicelle annodate. L'uso di cordicelle annodate come strumento di notazione è stato fatto con naturalezza da molti popoli data la dimestichezza che già avevano con esse nella vita quotidiana. Tra i vari popoli che utilizzarono ampiamente come sistema di registrazione questo vanno sicuramente ricordati gli Incas, i cui *Quipu* permettevano di rappresentare dati numerici e altri tipi di informazioni. Il metodo di registrazione Quipu era basato sul sistema di notazione decimale, e i vari tipi di registrazione venivano segnalati dallo spessore o dal colore delle corde.

(a)

Quipu incas.

Abachi

L'abaco rappresenta uno dei primi strumenti specificatamente dedicato al calcolo. L'abaco deriva dall'uso dei sassolini o gettoni per contare e in un certo senso ne costituisce un raffinamento: ora i sassolini sono organizzati in modo sistematico su diverse file. In questo caso, non è la forma del sassolino ad indicare il suo valore (unità, decine, ecc.) ma la posizione della fila in cui si trova il sassolino.

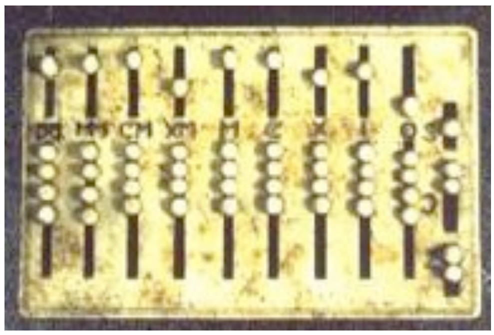
Nella sua lunga storia, l'abaco è passato attraverso variazioni continue nelle forme, nei materiali, nella costituzione: fu in metallo, in legno, tascabile, da ufficio, a pallottoliere, ecc. Questo strumento inoltre non è legato ad un particolare luogo ma è stato utilizzato ovunque in diverse forme, evolvendo per opera dei vari utilizzatori (agrimensori, astronomi, contabili, ecc.). Dai tipi più antichi e medievali deriva la versione attuale dell'abaco a palline infilate su bacchette di legno o fili metallici (forse inventato dai cinesi), detto *pallottoliere*, che permette di muovere più velocemente le palline nei conteggi.

In generale, l'abaco permette di operare con quantità intere sebbene possa essere facilmente esteso anche a valori non interi interpretando opportunamente le fila di palline. Per quanto riguarda le operazioni, la somma e la sottrazione sono le operazioni più semplici da eseguire con questo strumento. Comunque, anche le altre operazioni possono essere eseguite registrando in modo opportuno i risultati parziali, sebbene la loro esecuzione risulti più complessa. In ambito commerciale l'uso dell'abaco durò a lungo, anche dopo l'introduzione del sistema decimale posizionale. (usato inzilamente più dai matematici), fino al '700-'800.

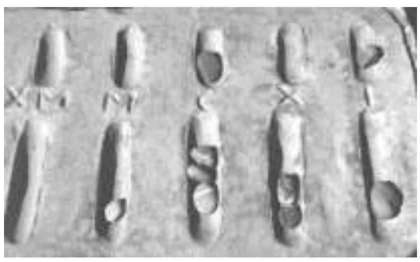
Diversi studiosi ritengono che sia stato l'abaco a suggerire l'attuale notazione decimale per i numeri.

Questa lastra di marmo con varie incisioni viene considerata l'abaco più antico ed è stata ritrovata presso **l'isola di Salamina in Grec**ia (risale approssimativamente al IV secolo a.C.) Sulle righe venivano collocate le pietruzze per eseguire le operazioni. (Museo Nazionale di Atene)

Abaco romano. Anche i romani utilizzarono l'abaco per eseguire le operazioni aritmetiche. Ci sono pervenuti alcuni esemplari in diverse fogge. Inizialmente, l'abaco era realizzato con una tavoletta di argilla con diverse scanalature contenenti pietruzze mobili opportunamente disposte per il conteggio. Dalla parola *calculus*, che in latino significa sassolino, pietruzza derivano oggi i termini matematematici "calcolo" e "calcolare".



Abaco romano in bronzo (approssimatamente tra il 2° e il 5° secolo d.C.) (collection IBM Europe).



Ricostruzione di un abaco romano in argilla.

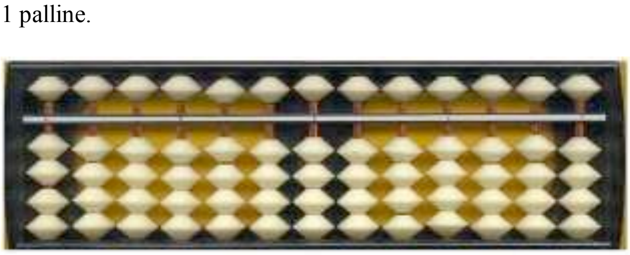
calcŭlus, i, m. (dim. di 2. calx), 1) **pietruzza, sassolino**: ubi... dumosis *calculus* (ghiaia) *arvis*, Verg. *G.* 2, 180; 2) **calcolo renale,** Plin. e a.; **pietruzza** per fare i conti, quindi: **conto,** Cic. e a.; **pietruzza** con cui si votava e giudicava, bianca per approvare, nera per respingere, quindi: **voto,** Quint. e a.; **pedina** (in una specie di gioco delle dame o degli scacchi: *ludus latrunculorum* e *duodecim scriptorum, lusus calculorum*): *si ad calculos eum vocet*, se lo inviti a fare un po' di conti, Liv. 5, 4, 7; *ad calculos vocare amicitiam*, sottomettere l'amicizia ai conteggi, Cic. *Lael.* 58; *calculis subductis*, tirata la somma, Cic. *Fin.* 2, 60; *calculum ponere*, fare i conti, Col. e a.: *accepi turdos cum quibus parem calculum ponere non possum*, ho ricevuto i t., dono che non posso ragguagliare, Plin. *ep.* 5, 2, 1; *mittere calculum*, gettare la pietruzza (nell'urna), Apul. *M.* 10, 8; **fig**: *errori album calculum adicere*, dare la propria approvazione a un errore, Plin. *ep.* 1, 2, 5; *census paucorum calculorum* (di pochi giudizi), Quint.; *o diem... notandum mihi candidissimo calculo* (da segnare con candidissima pietra), Plin. *ep.* 6, 11, 3; *calculum promovere*, spingere una pedina, Quint. 11, 2, 38; *calculus alligatus*, pedina bloccata, Sen.

Definizione di *calculus* da un dizionario di latino.

Suan pan. L'abaco cinese (chiamato *suan pan*) invece di avere aste con dieci palline, considera le cinquine. Ogni asta divisa in due parti: in una (parte *terra*) sono presenti cinque palline e nell'altra (parte *cielo*) due palline per contare le cinquine.

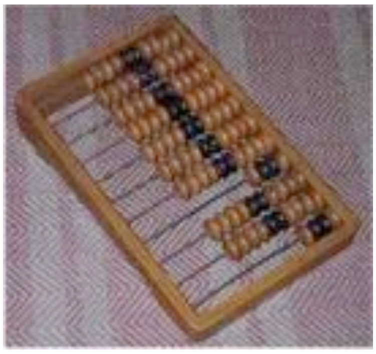
Abaco cinese (*suan-pan*).

Soroban. L'abaco giapponese (chiamato *soroban*) è un raffinamento di quello cinese ed è sempre basato sulle cinquine, sebbene in questo caso ogni fila comprenda solo 4 + 1 palline.



Abaco giapponese (*soroban*)

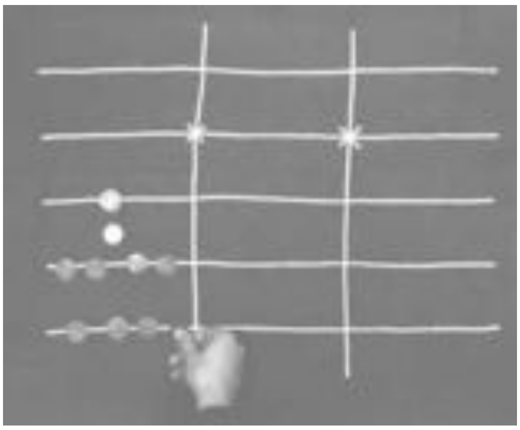
Abaco russo (*choty*). Questo abaco non ha la divisione delle palline in due parti come l'abaco cinese o giapponese. Una delle file di palline contiene solo 4 palline per potre essere utilizzata con il conteggio dei quarti di rublo o quarti di copeco.



Abaco russo (*choty*). Da questo abaco, a dieci palline, deriva il nostro attuale pallottoliere. **L'ultima riga con solo** quattro elementi serviva per eseguire calcoli con i quarti di rublo o quarti di copeco.

Tavola per contare. Nel medioevo l'abaco era molto spesso costituito da una da una tavola di legno oppure da una specie di tovaglia che veniva disposta sul tavolo, sulla quale erano tracciate opportune righe per le unità, le decine, ecc. e su cui venivano disposte le pedine utilizzate per i conteggi. La riga più in basso rappresentava le unità, quella immediatamente sopra le decine e così via. Su ogni riga venivano messi al massimo quattro sassolini, mentre il cinque veniva rappresentato collocando un sassolino nello spazio intermedio tra due righe. La riga delle migliaia era contraddistinta in modo da suddividere le cifre come facciamo noi oggi nella scrittura dei numeri con l'uso del punto per separare gruppi di tre cifre. Alla fine del tredicesimo secolo, i sassolini inizialmente utilizzati come elementi di conteggio vennero sostituiti da gettoni, simili a monete, creati appositamente per questo scopo.

Mentre in Italia alla fine del 1200 cominciò a diffondersi l'uso del sistema decimale posizionale in sostituzione della tavole, nel resto dell'Europa il loro uso continuò ancora per alcuni secoli. Non mancarono anche tentativi per integrare il sistema decimale posizionale con le tavole per contare.



Modello di una tavola per contare rappresentante il numero 194. Le croci servono per separare più facilmente le migliaia. Ogni colonna viene utilizzata per un operando o per il risultato di una data operazione.

Le costruzioni con riga e compasso

Una pagina del testo di Euclide in una delle versioni più antiche (Biblioteca Vaticana)

I problemi di costruzioni geometriche furono uno degli argomenti favoriti della geometria classica in Grecia. Tali costruzioni, ad esempio, hanno un ruolo centrale nei primi libri di Euclide poiché egli non considera oggetti geometrici di cui non abbia precedentemente stabilito l'esistenza con una esplicita costruzione: prima di dimostrare il teorema di Pitagora, spiega come costruire un quadrato. E’ probabile che nella prima fase della geometria greca i problemi di costruzioni venissero risolti utilizzando vari strumenti geometrici e un po’ alla volta si sia chiarito la questione degli strumenti elementari da utilizzare. Anche se i Greci utilizzarono diversi strumenti geometrici, la riga e il compasso furono quelli preferiti: un problema era considerato risolto quando era possibile dare un’opportuna costruzione mediante questi due strumenti[1]. Occorre precisare che la riga considerata nella matematica greca è una riga non graduata. Questo significa che risolvere, ad esempio, il problema della costruzione di un segmento di lunghezza doppia rispetto ad un segmento di lunghezza data non si può misurare il segmento e prolungarlo con un altro segmento della stessa misura.

Alcuni storici della matematica ritengono che la limitazione a riga e compasso sia nata nell’ambito della Scuola Platonica. La scelta di questi due strumenti rispetto ad altri è legata alla loro semplicità, al fatto che corrispondono a criteri di perfezione tipici del mondo greco e, infine, alla possibilità di descrivere il loro comportamento con una teoria geometrica abbastanza semplice.

La restrizione all’uso esclusivo di riga e compasso testimonia l’importanza che i Greci diedero al problema della scelta delle operazioni primitive. La scelta di usare solo riga e compasso è una cosa importante dal punto di vista computazionale: non permettere l’uso di altri strumenti (geometrici) significa chiedersi se tutti gli altri strumenti (ciascuno associabile ad una qualche operazione geometrica) sono riducibili a riga e compasso. Il tema della scelta delle operazioni di base ha una rilevanza notevole in informatica e comparirà ancora in matematica, ad esempio, nell’ambito della risolubilità delle equazioni polinomiali per radicali. E’ importante anche il confronto che nasce tra l’uso di questi due strumenti e i numeri (razionali) con le quattro operazioni: ciò che calcoliamo con riga e compasso corrisponde ai numeri con le quattro operazioni? La scoperta degli irrazionali aveva evidenziato questa

Per apprezzare pienamente il valore dell’opera dei Greci, bisogna dire che la riga e il compasso a cui pensano i matematici Greci non sono gli strumenti fisici che i ragazzi usano a scuola, ma si tratta invece di strumenti ideali perfetti[2]: in un certo senso possiamo dire che questi strumenti vanno intese come operazioni matematiche pure come l’addizione, la moltiplicazione, ecc. Questa “purezza” viene chiaramente espressa nei postulati euclidei e ancora prima nella famosa frase di Platone:

> *<<I geometri si servono delle figure visibili e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, bensì a ciò di cui esse sono le immagini, ragionando sul quadrato in sé, sulla diagonale in sé, e non su quelle che disegnano. Lo stesso si dica per tutte le figure che essi disegnano o modellano, di cui si servono come immagini (a guisa di ombre o di immagini riflesse sulle acque) cercando di veder certe verità che non si possono vedere se non col pensiero>> [Platone, La Repubblica]*

Il primo postulato di Euclide stabilisce che dati nel piano due punti si possa tracciare il segmento di retta che li congiunge; il secondo richiede che tale segmento si possa prolungare all'infinito; il terzo postula che si possa descrivere una circonferenza con qualsiasi centro e raggio assegnati.

Una costruzione geometrica è considerata valida quando ogni oggetto geometrico viene costruito con riga e compasso e non è scelto ad occhio o mediante misurazione. Più precisamente, le costruzioni con riga e compasso vengono realizzate attraverso alcune operazioni elementari che sono:

a) disegno di una retta (libera, passante per un punto, o per due punti,
b) disegno di una circonferenza (libera, di dato centro, o di dato centro e di dato raggio),
c) intersezione di due rette,
d) intersezione di una circonferenza con una retta,
e) intersezione di due circonferenze.

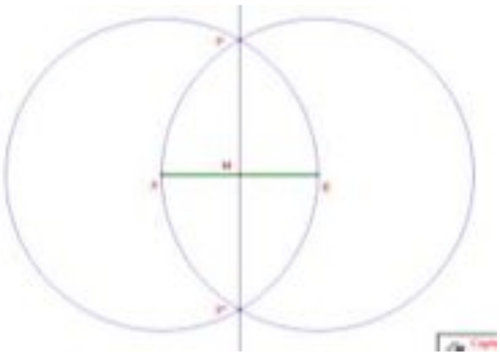
Ognuna di queste operazioni consente di individuare nuovi punti con cui procedere per realizzare la figura desiderata. Ogni **costruzione geometrica** parte da alcuni dati, che sono gli oggetti geometrici di partenza (rette, segmenti, circonferenze, ecc.) e tramite un numero finito di passi costituiti dalle operazioni elementari sopraelencati permette di realizzare un nuovo oggetto. La finitezza del numero di passi costituisce un aspetto importante dal punto di vista computazionale.

Un esempio di costruzione geometrica di questo tipo è il seguente: Sia AB il segmento iniziale di partenza:

[1] Fino a che punto i Greci erano coscienti di calcolare con riga e compasso? Fino a che punto erano coscienti che le loro procedure con riga e compasso rappresentavano degli algoritmi? Le loro costruzioni erano soprattutto delle dimostrazioni di esistenza.

[2] I Greci non si fanno fregare da una matematica approssimata, basata sulla misura empirica, ma elaborano una matematica del rigore lavorando con strumenti ideali.

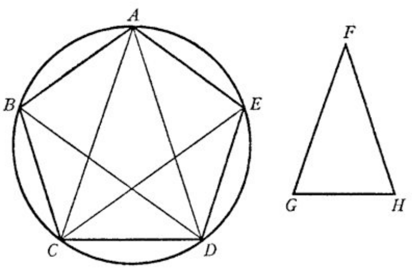
Tracciamo due circonferenze di raggio AB e centro rispettivamente A e B determinando le intersezioni P e **P’**. A questo punto, tracciamo la retta passante per P e **P’** e determiniamo l’intersezione M con il segmento AB: il punto M rappresenta il punto medio di AB.



Un esempio più complesso di costruzione geometrica per inscrivere un pentagono regolare in un cerchio, tratta dagli *Elementi* di Euclide, viene data nella seguente figura.

Libro IV - PROPOSIZIONE 11

Inscrivere in un cerchio dato un pentagono equilatero ed equiangolo.



Sia ABCDE il cerchio dato; si deve dunque iscrivere un pentagono equilatero ed equiangolo nel cerchio ABCDE.

Si assuma il triangolo isoscele FGH, avente ciascuno dei due angoli in G, H che sia il doppio dell'angolo in F, e nel cerchio ABCDE si iscriva il triangolo ACD equiangolo rispetto al triangolo FGH, in modo che l'angolo CAD sia uguale all'angolo in F, mentre gli angoli ACD, CDA siano uguali rispettivamente agli angoli in G, H; pure ciascuno dei due angoli ACD, CDA è quindi doppio dell'angolo CAD. Si dividano ora per metà gli angoli ACD, CDA rispettivamente con le rette CE, DB e risultino tracciate le congiungenti AB, BC, DE, EA.

Poiché dunque ciascuno dei due angoli ACD, CDA è il doppio dell'angolo CAD, ed essi sono stati divisi per metà dalle rette CE, DB, i cinque angoli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA sono uguali fra loro. Ma angoli uguali insistono su archi uguali; perciò i cinque archi AB, BC, CD, DE, EA sono fra loro uguali. Ma archi uguali sottendono corde uguali; le cinque corde AB, BC, CD, DE, EA sono quindi uguali fra loro; dunque il pentagono ABCDE è equilatero. Dico adesso che è anche equiangolo. Infatti, poiché l'arco AB è uguale all'arco DE, si aggiunga ad essi in comune l'arco BCD; tutto quanto l'arco ABCD è perciò uguale a tutto quanto l'arco EDCB. Ma l'angolo AED insiste sull'arco ABCD, mentre l'angolo BAE insiste sull'arco EDCB; quindi anche gli angoli BAE, AED sono uguali. Per la stessa ragione, pure ciascuno degli angoli ABC, BCD, CDE è uguale a ciascuno dei due angoli BAE, AED, per cui il pentagono ABCDE è equiangolo. Ma fu dimostrato che esso è anche equilatero.

Dunque, è stato iscritto in un cerchio dato un pentagono equilatero ed equiangolo. - Come dovevasi fare.

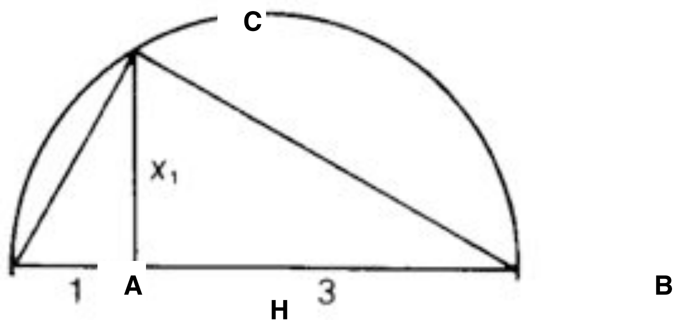
Descrizione di una procedura geometrica per realizzare un pentagono regolare.

In un certo senso, il vincolo a questi soli due strumenti rappresenta una sorta di definizione di *procedura geometrica* per la risoluzione di un problema e l’idea di costruzione geometrica anticipa in qualche modo il concetto moderno di algoritmo che verrà definito in modo preciso solo duemilacinquecento anni più tardi. Lo standard di rigore delle procedure di Euclide è altissimo per due motivi fondamentali:

- nessun elemento geometrico viene disegnato “ad occhio”, ma viene tracciato con una riga ed un compasso “ideali”;
- la procedura costruttiva è comunque accompagnata da una dimostrazione geometrica.

Questi due aspetti meritano un piccolo commento. Il primo punto pone in evidenza l’importanza della scelta delle operazioni primitive: in un linguaggio algoritmo la scelte delle operazioni primitive è un passo importante. Questo punto determina anche il problema di cosa è computabile e cosa non lo è. Dalle riflessioni che sono seguite su questo aspetto, sono derivate idee importanti per la matematica. In un’altra sezione vedremo quanto sia stato fertile dal punto vista matematico l’approfondimento di questo tema.

Il secondo punto ci deve far riflettere che in termini moderni le descrizioni fornite da Euclide per le costruzioni equivalgono agli algoritmi accompagnati da una dimostrazione di correttezza!



La costruzione di √3 mediante riga e compasso.

Sfruttando il secondo teorema di Euclide è possibile estrarre la radice quadrata di un qualunque numero, come illustrato in figura. Dato un segmento HB di lunghezza pari al numero di cui vogliamo estrarre la radice quadrata, tracciamo adiacente ad esso un segmento AH di lunghezza unitaria e determiniamo il punto medio del segmento AB risultante. Tracciamo ora la semicirconferenza con centro nel punto medio di AB e diametro pari ad AB. A partire da H tracciamo la perpendicolare ad AB e sia C il punto in cui tale perpendicolare incontra la semicirconferenza: per il secondo teorema di Euclide il segmento HC è di lunghezza pari a alla radice quadrata della lunghezza del segmento HB.

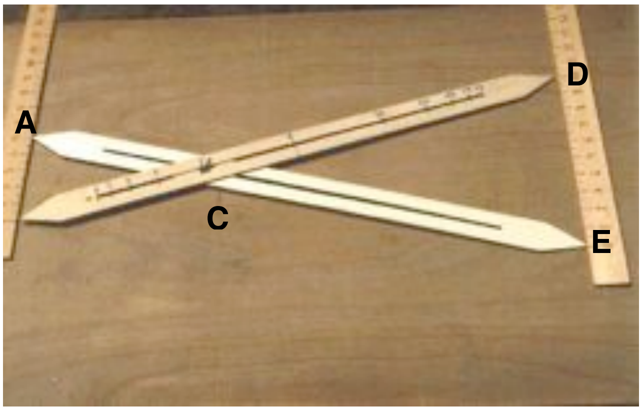
Compasso di proporzione

Fig. Compasso di proporzione.

Il compasso di proporzione (o compasso di riduzione) è costituito da una coppia di aste fissate a metà con delle cerniere, e con le punte su entrambe le estremità di ciascuna asta. Questo tipo di strumento veniva utilizzato soprattutto dai disegnatori che se ne servivano per ridurre o ingrandire i disegni secondo una data proporzione e ciò, in termini matematici, corrisponde alle operazioni di moltiplicazione e di divisione.

Fig. 1. Ricostruzione di un compasso di proporzione.

Nella seguente ricostruzione il perno è fissato sul valore 2: le aste a destra del perno hanno lunghezza doppia di quelle a sinistra del perno. Ogni misura rilevata con le aste più lunghe risulta pari al doppio di quella indicata dalle aste più corte. Arricchendo lo strumento con altre scale era possibile eseguire altre operazioni matematiche: suddividere i cerchi in un certo numero di parti, determinare radici quadrate e cubiche, ecc. Il principio che consente a questo strumento di svolgere queste funzioni sta nel punto di intersezione delle due aste (cioè, il perno di articolazione) che, essendo regolabile, permette di muovere il perno verso l'alto o verso il basso dividendo le due aste in parti secondo diverse proporzioni. Su entrambe i lati delle aste sono incise diverse scale che vengono utilizzate per la regolazione del perno di articolazione. Generalmente, le scale presenti in questi strumenti erano quattro: scala lineare, scala dei cerchi, scala dei piani e scala dei solidi. La scala lineare, la più semplice, permetteva di ingrandire o ridurre i disegni secondo proporzioni diverse e, di solito, comprendeva i valori da 1 a 10.



Il compasso di Galileo

Il grande risveglio ingegneristico che si ebbe nel corso del Rinascimento fece crescere l'esigenza strumenti capaci di facilitare i calcoli aritmetici. La costruzione di palazzi, di cattedrali e di fortezze, la navigazione, l'astronomia e anche lo sviluppo delle armi da fuoco ponevano svariati problemi risolvibili applicando il calcolo matematico. Nel corso del Cinquecento cominciarono a comparire strumenti utili in questo senso, come il radio latino, il proteo militare e il compasso geometrico[1].

Compasso di Galileo in ottone (lungh. 256 mm, largh. aperto 360 mm). Museo delle Scienze di Firenze.

In Italia, uno dei primi ad introdurre questo genere di strumenti fu Galileo Galilei (1564-1642). Il grande scienziato pisano rappresenta una delle figure chiave per la storia della scienza; a lui dobbiamo la nascita della fisica moderna e dell'astronomia moderna grazie alle prime osservazioni con il cannocchiale da lui stesso costruito. Elaborò un metodo del tutto nuovo di fare scienza, basato sulla sperimentazione, sulla misurazione delle grandezze e sulla matematizzazione delle leggi che governano i fenomeni naturali, in netta contrapposizione con il metodo aristotelico, che pur rielaborato nel corso del Medioevo, aveva portato scarsi progressi nella cultura scientifica occidentale. Galileo Galilei era nato a Pisa nel 1564. Il padre, mercante fiorentino e insegnante di musica, desiderava fare del figlio un medico e così nel 1581 Galileo si iscrisse a Medicina presso l'Università di Pisa; qui però non completò mai gli studi, perché nel frattempo aveva maturato un marcato interesse per la matematica e per le scienze naturali. Nel 1589 divenne professore di matematica esercitando prima a Firenze, poi a Siena e infine all'Università di Pisa. In questo periodo scrisse (ma non pubblicò) alcuni lavori sull'idrostatica e sul moto dei corpi, che rivelano già un modo di guardare ai fenomeni diverso dal passato. Nello stesso periodo viaggiò per l'Italia incontrando alcuni importanti matematici.

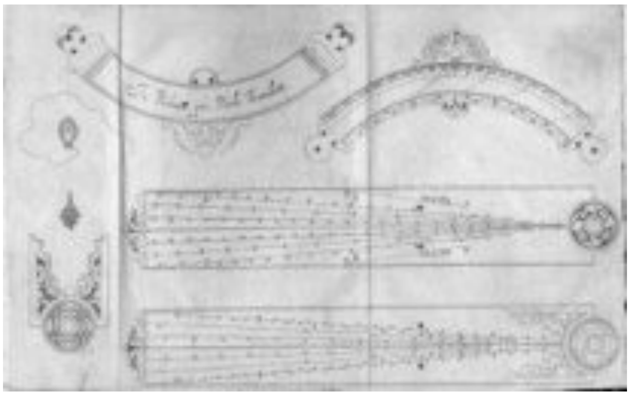
In questi anni cominciarono anche le riflessioni di Galileo su un nuovo metodo per indagare i fenomeni naturali; in particolare, egli cominciò a realizzare svariati esperimenti scientifici per meglio capire le leggi del moto. Uno degli aneddoti più noti, ma non confermati, afferma che egli abbia lasciato cadere contemporaneamente due oggetti di peso diverso dalla torre di Pisa per mostrare l'indipendenza dal peso degli oggetti nel moto in caduta libera. Nel 1592 si trasferì a Padova per una cattedra di matematica e dove rimarrà per diciotto anni. In questa città continuò ad effettuare numerosi esperimenti di fisica scoprendo alcune delle leggi fondamentali che regolano il moto dei corpi (la caduta dei gravi; il moto del pendolo e altre questioni di meccanica).

Le critiche di Galileo alla scienza ufficiale non si limitavano al mondo contingente, ma anche al sistema tolemaico che poneva la terra al centro dell'universo. Nel 1597 aderì alla teoria copernicana. Una tappa fondamentale del percorso scientifico di Galileo è legata certamente alla costruzione del cannocchiale con cui incominciò nel 1609 una serie di osservazioni che cambiarono totalmente la storia dell'astronomia e, più in generale, la storia della scienza. Lo strumento era stato inventato l'anno prima in Olanda, ma Galileo, procedendo in modo indipendente, ne costruì una versione più potente. Dice Rossi[2]: «*Egli lo impiega e lo volge verso il cielo con spirito metodico e con mentalità scientifica, lo trasforma in uno strumento scientifico. [...] Bisogna considerare gli strumenti come una fonte di conoscenza, abbandonare quell'antico, radicato punto di vista antropocentrico che considera il guardare naturale degli occhi umani come un criterio assoluto di conoscenza*». I primi oggetti celesti su cui Galileo puntò l'attenzione furono la luna con la scoperta delle montagne e dei crateri lunari, il sole con la scoperta delle macchie solari, i pianeti con la scoperta dei quattro satelliti medicei e Venere con l'osservazione delle fasi, la Via Lattea con il riconoscimento della struttura stellare. Tutte queste osservazioni lo convinsero ancora di più dell'inadeguatezza del sistema aristotelico-tolemaico in cui si sosteneva la perfezione dei cieli. I risultati delle sue osservazioni astronomiche furono pubblicati alcuni mesi più tardi nel *Sidereus Nuncius*, e suscitarono enorme clamore non solo nel mondo scientifico, ma anche in quello filosofico e quello clericale. In questo trattato, Galileo affermava che le sue osservazioni provavano la validità del sistema eliocentrico, in contrapposizione alle convinzioni tradizionalmente sostenute dalla Chiesa Cattolica e da tutto l'ambiente intellettuale del tempo, che metteva la Terra al centro dell'universo. Negli anni successivi, la posizione di Galileo iniziò ad essere contestata e nel 1614 un sacerdote fiorentino accusò lui e i suoi seguaci di propugnare idee contrarie alle Sacre Scritture. Due anni più tardi, la teoria eliocentrica di Copernico fu giudicata contraria ai sacri testi e il cardinale Bellarmino intimò a Galileo di ripudiarla. Per alcuni anni Galileo abbandonò i temi di astronomia e si dedicò alla fisica e al metodo scientifico. Espresse le sue opinioni sul metodo scientifico nel *Saggiatore* (1623), che dedicò al nuovo papa appena eletto nella speranza di riconquistare la fiducia dell'ambiente cattolico. Nel 1624 ritornò sui temi di astronomia e in particolare sui sistemi tolemaico e copernicano e nel 1632 pubblicò il libro *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*. Sebbene il libro fosse stato inizialmente approvato dalla censura, poco dopo il tribunale dell'Inquisizione di Roma condannò il grande scienziato per grave sospetto di eresia costringendolo ad abiurare. Venne condannato agli arresti domiciliari permanenti ad Arcetri e la sua opera venne bruciata. Nonostante la pubblica abiura, l'età e i problemi di vista, Galileo continuò a lavorare ai problemi di moto e segretamente fece pubblicare a Leida in Olanda nel 1638 i *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica*. In quest'ultima opera riesamina e perfeziona gli

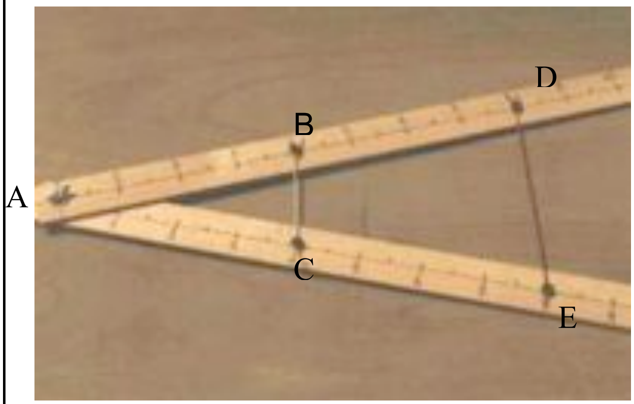
[1] Vedere anche http://www.imss.fi.it/index.html. I compassi geometrici sono noti anche con il nome di compassi di proporzione, o compassi militari o compassi di riduzione, anche se a dire il vero c'è una certa confusione sui termini.

[2] Rossi 1997, pag. 16.

studi precedenti sul movimento e, in generale, le leggi della meccanica; questo testo, il migliore dal punto di vista del rigore matematico, aprì la strada a Newton nel formulare la legge della gravitazione universale. Si spense ad Arcetri nel 1642, un anno prima della nascita di Isaac Newton.

Durante il soggiorno di Galileo a Padova, verso il 1597, inventò un compasso particolare ("*il compasso geometrico et militare*") che consentiva di eseguire diverse operazioni matematiche e di risolvere problemi applicativi anche in campo balistico. L'invenzione forse non era del tutto originale, in quanto Galileo aveva avuto modo di conoscere[3] alcuni rudimentali strumenti in uso in ambito militare realizzati o proposti in precedenza dai matematici Niccolò Tartaglia (*La Nova Scienza*) e Guidobaldo del Monte. Lo strumento era motivato da esigenze essenzialmente pratiche, diversamente dagli studi di fisica di respiro teorico-fondazionale. Infatti, venne denominato da Galileo "*compasso geometrico et militare*"; poteva essere impiegato non solo in campo militare, ma anche in topografia, in agrimensura, nel disegno tecnico e in altri campi tecnici grazie a diverse scale di calcolo. Un dettagliato manuale accompagnava lo strumento con la descrizione dei procedimenti di calcolo da seguire per risolvere numerosi problemi[4]. Il compasso era composto da due aste in ottone graduate e incernierate, ad una estremità da un quadrante graduato con diverse scale fissato tramite viti ai fori praticati nei bracci del compasso, un cursore infilato in uno dei bracci del compasso e che permetteva sia di tenere lo strumento in verticale, sia di allungare il braccio nel quale è infilato. Sebbene il grado di precisione fosse limitato, il compasso di Galileo ebbe molto successo proprio per la grande necessità esistente in quei tempi di un ausilio per i calcoli.

Disegni dal manuale del compasso di Galileo.

Sulle aste del compasso erano tracciate sette scale (quattro sul recto e tre sul verso), mentre altre quattro scale segnate sul quadrante completavano lo strumento, che così consentiva di effettuare numerose operazione aritmetiche e geometriche: dalla moltiplicazione alla divisione, dal calcolo degli interessi all'estrazione di radici quadrate e cubiche, dal disegno di poligoni regolari al calcolo di aree e volumi, dalla misura dei calibri dei cannoni ai rilevamenti topografici per un terreno. Nella seguente figura è possibile vedere una ricostruzione del compasso di Galileo con la *scala delle Linee Aritmetiche*, le più semplici,



Ricostruzione del compasso di Galileo con la scala delle linee Aritmetiche.

che consentivano di eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni; così le descrive Galilei[5]:

> *Venendo alla dichiarazione particolare delle operazioni di questo nuovo Compasso Geometrico e Militare, primamente faremo principio da quella faccia di esso nella quale sono notate quattro coppie di linee con loro divisioni e numeri; e tra esse parleremo prima delle più interiori, denominate Linee Aritmetiche per esser le loro divisioni fatte in proporzione aritmetica, cioè con eguali eccessi, che procedono sino al numero 250, dalle quali trarremo diversi usi.*

Le Linee Aritmetiche erano equispaziate e dividevano un intervallo di 245 mm in 250 parti uguali. Il principio di funzionamento per eseguire moltiplicazioni e divisioni era molto elementare e, in particolare, sfruttava le proporzionalità esistenti tra le lunghezze dei lati di triangoli simili. Con riferimento alla figura, il segmento DE è il doppio del segmento BC poiché il triangolo ABC è simile al triangolo DAE. Le misure dei segmenti (ad esempio CB e DE) veniva prese utilizzando un altro compasso ausiliario, detto *comparatore* (o *compasso a punte secche*). Un principio come questo si rivelava molto utile anche nell'ambito del disegno tecnico, dove spesso era necessario ingrandire o rimpicciolire un disegno secondo un certo rapporto di similitudine. Qui di seguito possiamo vedere la descrizione data dallo stesso Galileo della procedura per risolvere un problema del tre semplice[6]:

> *REGOLA DEL TRE RISOLUTA COL MEZO DEL COMPASSO E DELLE MEDESIME LINEE ARITMETICHE.*
>
> *[...] Proposti tre numeri, trovare il quarto proporzionale; perché altro non è la regola aurea, che del tre domandano i prattici, che trovare il quarto numero proporzionale alli tre proposti. Dimostrando adunque il tutto con l'essempio, per più chiara intelligenza, diciamo: Se 80 ci dà 120, che ci darà 100? Hai dunque tre numeri posti con quest'ordine 80 120 100: e per trovare il quarto numero che cerchiamo, prendi sopra lo Strumento rettamente il secondo numero de i proposti, cioè 120, ed applicalo trasversalmente al primo, cioè all'80; dipoi prendi trasversalmente il terzo numero, cioè 100, e misuralo rettamente sopra la scala; e quello che troverai, cioè 150, sarà il quarto numero cercato.*

Per dimostrare la versatilità delle sole Linee Aritmetiche Galileo mostrava come effettuare conversioni tra monete diverse (a quel tempo in Italia erano in uso numerosi sistemi

[3] Vedere E. Thomas e M.R. Williams (2003) The sector: its history, scales, and uses. *Annals of the History of Computing, IEEE*, Vol. 25(1), pagg. 34 – 47.

[4] Inizialmente lo strumento veniva venduto senza manuale d'uso e chi che lo acquistava veniva istruito all'uso direttamente da Galileo. Più tardi (1606) Galileo pubblicò il manuale d'uso.

[5] Da Galilei 1640, pag. 3.

[6] Ibid., pag. 9.

monetari), come calcolare l'interesse composto mediante un procedimento iterativo[7] ("*interessi su interessi*"), come tracciare figure simili, ecc. Il calcolo della radice quadrata avveniva invece utilizzando un'altra scala, detta *scala delle Linee Geometriche*, e viene così descritto da Galileo[8]:

> *ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA CON L'AIUTO DELLE MEDESIME LINEE.*
> *[...] Per estrar dunque e trovar la radice quadrata di un numero mezano proposto, prima devesi aggiustar lo Strumento, la qual cosa sarà con l'accomodare trasversalmente al 16 delle Linee Geometriche lo spazio di 40 punti preso rettamente dalle Linee Aritmetiche: dipoi del numero proposto leva via le due ultime figure, che dinotano le unità e le decine; e quel numero che resta, prendi trasversalmente dalle Linee Geometriche, e misuralo rettamente sopra le Aritmetiche; e quello che trovi sarà la radice quadrata del numero proposto. Come, per esempio, volendo la radice di questo numero 4630, levate le due ultime figure, cioè il 30, resta 46; però piglierai trasversalmente 46 dalle Linee Geometriche e lo misurerai rettamente sopra le Aritmetiche, e lo troverai contenere punti 68, che è la prossima radice cercata.*

Riassumendo, il compasso galileano comprendeva le seguenti scale sulle due aste:

- *linee aritmetiche*, servivano per eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni;
- *linee geometriche*, servivano a svolgere operazioni geometriche sulle figure e ad estrarre la radice quadrata;
- *linee stereometriche*, servivano a svolgere operazioni geometriche su corpi regolari e ad estrarre la radice cubica;
- *linee metalliche*, erano utilizzate dagli artiglieri per calcolare il calibro dei proiettili;
- *linee poligrafiche*, servivano a disegnare poligoni regolari e a dividere il cerchio in parti uguali;
- *linee tetragoniche*, servivano a trovare l'area dei poligoni regolari;
- *linee aggiunte*, servivano a trovare l'area dei settori circolari.

Le scale sul quadrante erano:

- *la squadra dei bombardieri*, serviva a misurare l'alzo dei cannoni;
- *il quadrante astronomico*, serviva a calcolare l'altezza degli astri sull'orizzonte;
- *scala delle pendenze*, nella costruzione di edifici serviva a segnare l'inclinazione delle muraglie da un rapporto di 1 a 1,5 tra l'altezza e la scarpa, a un rapporto di 1 a 10;
- *quadrato delle ombre*, serviva a misurare le distanze inaccessibili.

Per ogni tipo di scala il manuale di Galileo mostrava diversi esempi di applicazione; purtroppo lo stesso manuale non spiegava come costruire le diverse scale[9], questo per evitare che altri ne copiassero i principi di funzionamento. Certamente la realizzazione di uno strumento con così tante scale deve aver richiesto parecchi calcoli. Ad esempio, per calcolare la scala delle linee tetragoniche Galileo deve aver affrontato un calcolo equivalente alla seguente formula moderna[10]:

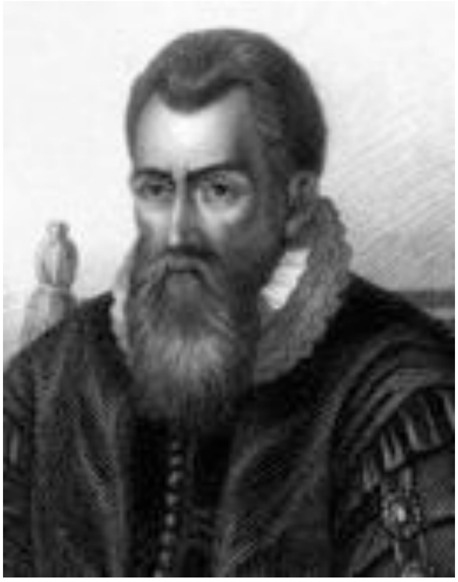
$$L = 2R \cdot \sqrt{\frac{\pi}{n} \cdot tg\frac{\pi}{n}}$$

Lo strumento ebbe molto successo tant'è che nel 1606 ne realizzò 60 copie e decise di affidarne la produzione ad un artigiano di fiducia e grazie ad esso Galilei ricavò soddisfacenti guadagni. L'introduzione dello strumento suscitò subito grande interesse, ma determinò anche un'aspra polemica sulla paternità dell'invenzione; in particolare, Galilei entrò in polemica con Baldassare Capra, un suo ex allievo. In Europa, strumenti simili furono inventati quasi contemporaneamente e in modo indipendente in più posti; ad esempio un apparecchio di questo genere fu realizzato in Inghilterra da Thomas Hood (1556-1620) nel 1598. Dopo la morte di Galilei questi compassi, solitamente fabbricati in ottone o in avorio, furono ulteriormente perfezionati e costruiti in molte varianti; furono aggiunte nuove linee utili per il calcolo trigonometrico e per altri scopi. La precisione era legata all'accuratezza delle incisioni con cui venivano realizzate le varie scale e dalla facilità con cui si potevano prendere su di esse le misure; anche la precisione della cerniera tra le due aste influenzava il buon funzionamento dello strumento; comunque la precisione era sufficiente per la gran parte dei problemi pratici per cui veniva impiegato. Questi strumenti furono privilegiati da geometri, architetti, navigatori, cartografi, ecc. e il loro uso durò sino all'inizio dell'Ottocento, quando con l'esigenza di una maggiore flessibilità e precisione nei calcoli matematici furono rimpiazzati dal regolo calcolatore logaritmico.

Regolo del XVII secolo per compiere operazioni militari (come la misura dei calibri per proiettili di pietra o di piombo), rilievi topografici e misurazioni del tempo.

[7] Galilei 1640, pag. 25.
[8] Ibid., pag. 20.
[9] Vedere R. Verdiani in Nuova Secondaria, 2005, n.5, pag. 51 e n. 7, pag. 55.
[10] R. Verdiani in Nuova Secondaria, 2005, n. 7, pag. 59.

Bastoncini di Nepero



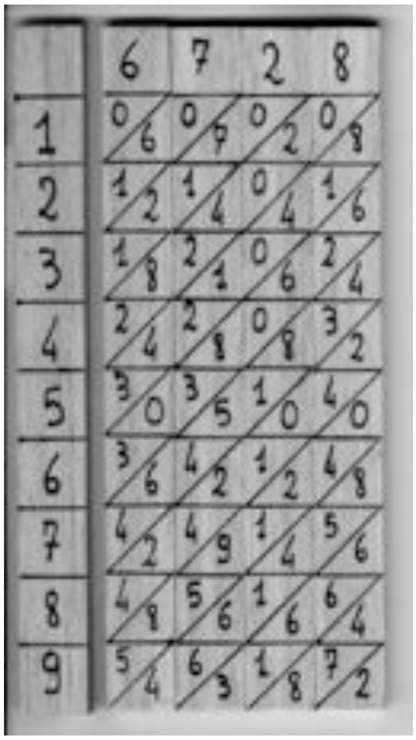
John Napier

Bastoncini di Nepero.

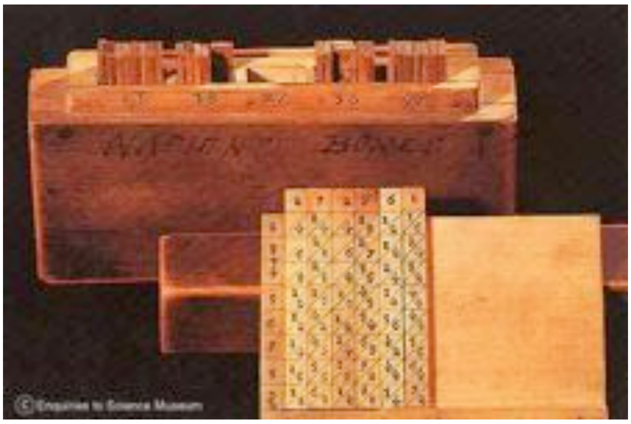
Nella sua opera *Rabdologia*, pubblicata nel 1617, il matematico scozzese Nepero illustrò l'invenzione dei bastoncini per la moltiplicazione (1550-1617).

Ogni bastoncino rappresenta una colonna della tavola pitagorica e contiene i multipli di una data cifra. Accostando uno vicino all'altro i bastoncini relativi al numero da moltiplicare e leggendo la riga di interesse, è possibile realizzare direttamente la moltiplicazione di un numero a più cifre per un numero ad una singola cifra.

Ogni casella è divisa da una diagonale che indica la cifra da sommare a destra e quella da sommare a sinistra in modo da separare la cifra delle decine da quella delle unità. Ovviamente, le somme delle cifre e la gestione dei riporti devono essere svolti mentalmente. Per moltiplicazioni più complesse è necessario eseguire a parte le somme dei prodotti parziali. Utilizzando in modo opportuno i bastoncini è possibile eseguire anche una divisione.



Vediamo un esempio di calcolo: supponiamo di voler eseguire la moltiplicazione 7628 × 5. Prima bisogna scegliere i bastoncini corrispondenti alle cifre 7, 6, 2 e 8 e si dispongono uno vicino all'altro in modo ordinato. A questo punto, si considera la quinta riga (escludendo quella più in alto): il risultato della moltiplicazione è dato sommando le cifre all'interno dei vari parallelogrammi presenti nella riga, cioè [3] [0+3] [5+1] [0+4] [0] = 33640. Qualora la somma di due cifre superi 9, è necessario considerare il riporto da aggiungere alla somma del parallelogramma immediatamente a sinistra.



Il principio che sta alla base dei bastoncini di Nepero era stato già descritto almeno due secoli prima da matematici indiani e arabi. Il dispositivo è molto semplice e dal punto di vista del calcolo si rivela più utile in ambito didattico che sul piano pratico.

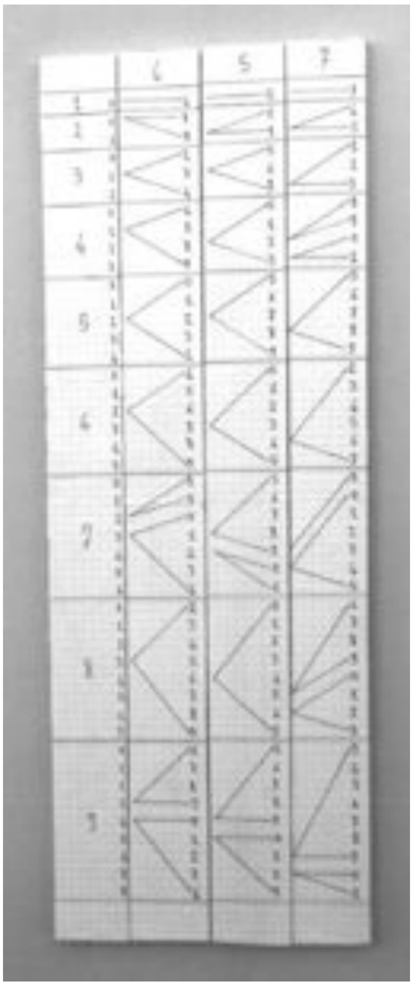
I bastoncini non si possono ancora considerare uno strumento di calcolo veramente automatico, poiché per effettuare una moltiplicazioni le somme dei riporti devono essere svolte mentalmente. Questi bastoncini comunque testimoniano il rinnovato interesse per gli strumenti di calcolo in conseguenza del risveglio scientifico che coinvolse l'Europa nel 1500 e 1600, interesse che porterà nel giro di pochi anni all'invenzione delle calcolatrici meccaniche automatiche. Successivamente si cercò di perfezionare i bastoncini di Nepero riportando le colonne numerate su cilindri di legno.

Cilindri di Schott

Cilindri di Schott. [foto **dell'autore**]

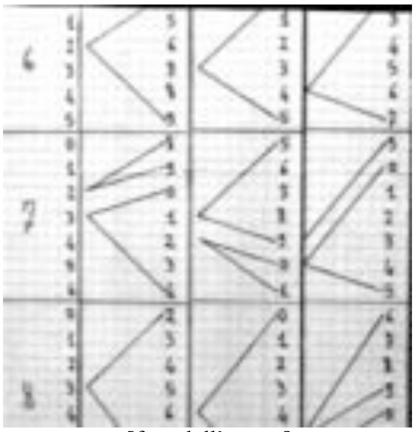
Poco prima di morire Gaspard Schott (1608-1666) descrisse uno sviluppo dei bastoncini di Nepero. Il dispositivo era basato su una fila di cilindri, ciascuno dei quali portava incisa una serie completa dei bastoncini di Nepero. I cilindri erano chiusi in una scatola con delle aperture sul coperchio e ruotando in modo opportuno i cilindri era possibile effettuare la moltiplicazione. Il dispositivo non ebbe però successo a causa della difficoltà nella lettura delle cifre sui cilindri, oltre ad avere gli stessi inconvenienti già descritti per i bastoncini di Nepero. C'è da dire che l'idea dei cilindri fosse stata già anticipata nell'Orologio Calcolatore di Schickard (descritto più avanti) ma questo dispositivo era rimasto sconosciuto a causa della prematura scomparsa dell'autore.

Regoli di Genaille



Regoli di Genaille.

Un raffinamento dei bastoncini di Nepero è rappresentato dai regoli, introdotti attorno al 1885 dall'ingegnere francese H. Genaille. Come abbiamo detto, il maggiore inconveniente dei bastoncini di Nepero (e anche dei cilindri di Schott) è costituito dalla mancanza di una gestione automatica dei riporti. I regoli Genaille risolvono elegantemente questo problema e permettono di eseguire automaticamente il riporto in una moltiplicazione. Anche in questo caso, i regoli permettono di moltiplicare un numero a più cifre con un numero di una sola cifra. Con regoli diversi da quelli per la moltiplicazione è possibile eseguire anche l'operazione di divisione, determinando sia il quoziente che il resto.



[foto dell'autore]

Vediamo un esempio di moltiplicazione mediante i regoli di Genaille. Supponiamo di voler moltiplicare 457 · 7. Prima si scelgono i regoli corrispondenti alle cifre 4, 5 e 7 e si dispongono uno vicino all'altro in mood ordinato e si considera la settima riga. Le cifre del risultato vengono determinate da destra a sinistra procedendo nel seguente modo:

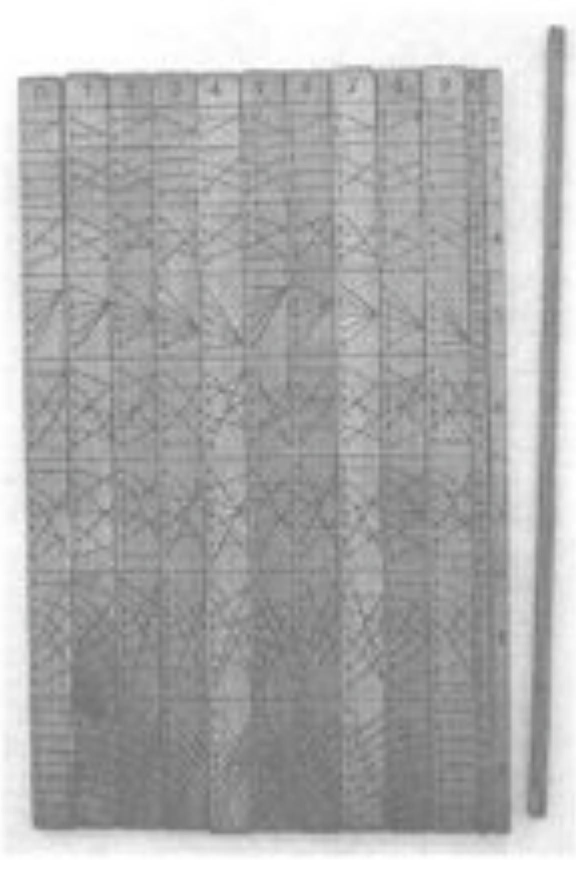
(i) nella prima colonna a destra troviamo 9, questa è la prima cifra a destra del risultato,

(ii) seguendo la linea che parte da 9 si arriva nella seconda colonna alla cifra 9 (la seconda cifra),

(iii) da questa si va alla terza colonna seguendo la linea, dove troviamo la cifra 1 (terza cifra), infine

(iv) passando alla quarta colonna si trova l'ultima cifra 3 (quarta cifra);

(v) il risultato, in conclusione, è 3199.



Regoli di Genaille per la divisione.

Esiste una versione dei regoli anche per eseguire la divisione.

Anche i regoli di Genaille sono risultati più utili dal punto di vista didattico che da quello pratico, infatti hanno avuto una scarsa diffusione.

Orologio calcolatore di Schickard

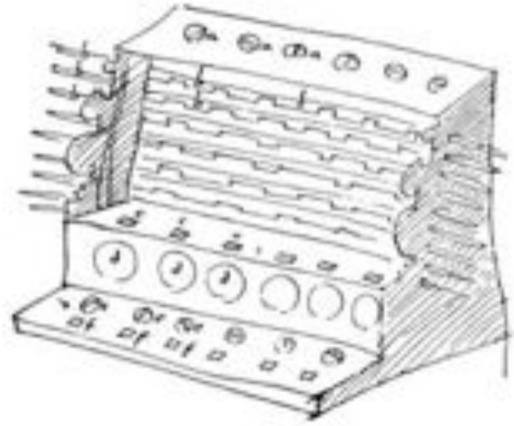
W. Schickard.

Il primo dispositivo di calcolo in grado di effettuare calcoli automaticamente fu realizzato attorno al 1623 dall'astronomo e matematico W. Schickard (1592-1635) e denominato *Orologio Calcolatore*.

Fig. 1. Ricostruzione dell'Orologio Calcolatore di Schickard (Deutsches Museum, Monaco).

Tale dispositivo, che avrebbe dovuto servire per facilitare i calcoli in ambito astronomico, combinava la tecnologia degli orologi (da cui il nome) con il principio dei bastoncini di Nepero. Questa macchina (fisicamente realizzata dall'orologiaio J. Pfister), era in grado di lavorare con numeri di sei cifre e permetteva di eseguire autonomamente la somma e la differenza di due numeri. Per eseguire la moltiplicazione e la divisione la macchina di Schickard utilizzava un adattamento dei bastoncini di Nepero riportati su cilindri (come in quelli che verranno realizzati in seguito da Schott). Il prototipo di Schickard purtroppo andò distrutto in un incendio e lo stesso inventore, amico del grande astronomo Keplero, dopo poco tempo morì di peste durante la guerra dei Trent'anni. L'esistenza di questo dispositivo fu scoperta solo nel 1957 esaminando alcune lettere inviate da Schickard a Keplero (datate 1623 e 1624). Sulla base di queste descrizioni è stato possibile ricostruire un probabile modello dell'Orologio Calcolatore.

Questo strumento rappresenta una pietra miliare nella storia del calcolo automatico. Per la prima volta nella storia degli strumenti di calcolo viene costruito un dispositivo in grado di realizzare autonomamente un'operazione aritmetica. L'orologio calcolatore di Schickard è il primo apparato a svolgere autonomamente le funzioni dell'agente di calcolo a differenza di tutti i dispositivi precedenti, dove l'agente di calcolo era rappresentato dall'uomo. Purtroppo la mancata diffusione di questo dispositivo consegna alla storia del calcolo un altro inventore, cioè Pascal.



Schizzi del calcolatore Schikard.

Pascalina

Blaise Pascal.

Anche il matematico e filosofo francese Blaise Pascal inventò, indipendentemente da Schickard, una macchina calcolatrice per agevolare il lavoro di suo padre, esattore delle imposte a Rouen. Pascal è nato nel 1623 ed è morto nel 1662. Nel 1642, a soli 19 anni, inventò la Pascalina!.

Uno degli esemplari di Pascalina realizzati da Pascal.

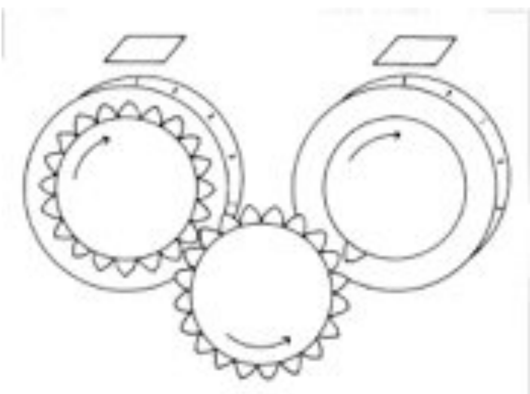
La macchina, completata nel 1644 e chiamata "Pascalina", era in grado di eseguire addizioni e sottrazioni tra numeri interi con il riporto automatico delle cifre. Dal punto di vista commerciale, la Pascalina non ebbe il successo sperato (in tutto, furono venduti solo una quindicina di esemplari) a causa della scarsa affidabilità e del costo rilevante. Questo strumento fu però illustrato alla comunità scientifica del tempo ed ebbe il merito di stimolare altri inventori a realizzare strumenti di questo genere.

La Pascalina funziona con un sistema di ruote sulla cui circonferenza sono incise le cifre da zero a nove; le ruote (da cinque, nei primi modelli, fino a otto, negli ultimi modelli) rappresentano le unità, le decine, le centinaia e così via. La loro rotazione rende automatica l'operazione dei riporti, eliminando in tal modo una delle maggiori difficoltà esistenti nell'effettuazione dei calcoli a mente.

	
Fig. Vista esterna della Pascalina.	Fig. 2. **Vista dell'interno** della Pascalina.

Quando la prima ruota (quelle dell'unità) completa un giro, fa avanzare di un'unità quella contigua delle decine e così via. Poiché le ruote possono girare in una sola direzione non è possibile svolgere la sottrazione girando in senso opposto le ruote. La sottrazione viene invece ridotta ad una somma mediante un accorgimento basato sulla complementazione delle cifre del sottraendo (*complemento a nove*), tecnica già utilizzata con l'abaco.

Contatore decimale meccanico

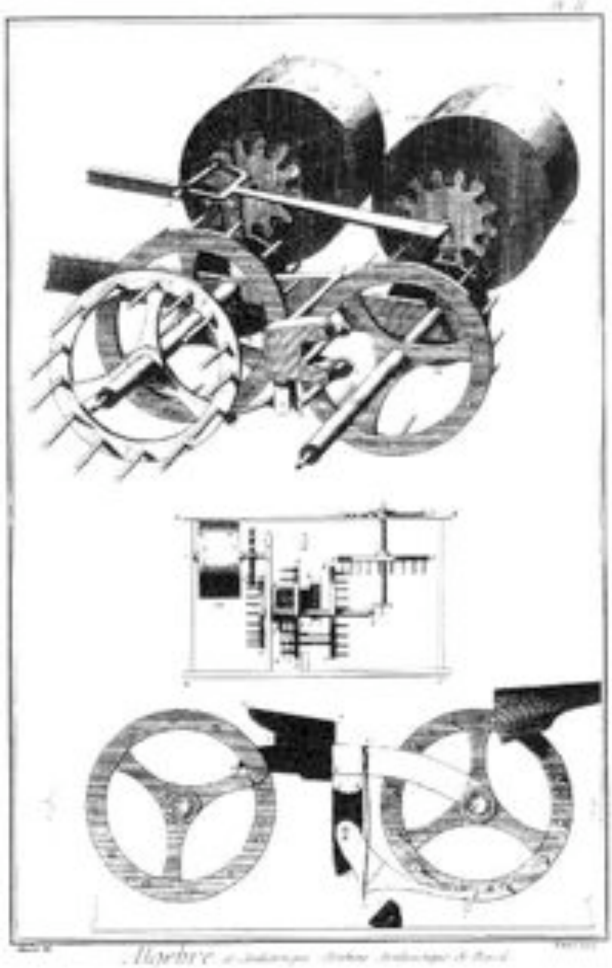


Schema del meccanismo del riporto utilizzato da Schickard. La ruota a destra dotata di un solo dente fa scattare la **ruota a sinistra di un'unità solo dopo aver co**mpletato un intero giro.

L'Orologio Calcolatore di Schickard, la Pascalina e le successive calcolatrici meccaniche sono quasi tutte basate su un dispositivo di conteggio, detto *contatore decimale*, realizzato mediante alcuni ingranaggi: un giro completo di una ruota fa avanzare di un'unità la ruota a fianco, la quale una volta che ha completato un'intera rotazione, fa avanzare a sua volta di un'unità la ruota successiva.

Contatore decimale di tipo meccanico (particolare di un contachilometri di un automobi**le). [foto dell'autore]**

Lo stesso principio viene adottato nel contachilometri di un'automobile. In questi contatori meccanici, la *ruota dentata* gioca un ruolo essenziale e in un certo senso è al centro del funzionamento del calcolatore. In una ruota dentata, l'elemento costruttivo che rappresenta il numero è anche l'elemento calcolante. Ad esempio, per eseguire la somma 2 + 5, si dovrà aggiungere 5 alla ruota con dieci denti che è già stata portata su 2; in concreto, ciò significa che la ruota verrà ruotata in avanti di cinque posizioni in modo che alla fine del movimento, la ruota mostri il numero 7, che è il risultato dell'operazione. In questo modo la ruota svolge due funzioni diverse: è memoria, quando viene impostata su 2 e quando indica 7; è dispositivo attivo di calcolo quando con la sua rotazione in avanti di 5 posizioni permette di aggiungere l'addendo 5 al 2 già presente (o, se vogliamo, già memorizzato). Riassumendo, la posizione della ruota dentata permette di rappresentare (cioè memorizzare) i numeri, mentre il movimento degli ingranaggi costituisce il processo di calcolo.



Schema del meccanismo del riporto utilizzato da Pascal, dalla Encyclope**die di Diderot e d'Alambert, 1751.**

Per poter eseguire la più semplice delle operazioni aritmetiche, la somma, è necessario aggiungere alla ruota un opportuno meccanismo per gestire il riporto: ogni volta che la ruota completa un giro passando dal nove allo zero, la ruota a fianco deve incrementare di un'unità. Una prima soluzione al problema può essere rappresentata da una semplice ingranaggio costituito da una coppia di ruote dentate adiacenti. Questo tipo di meccanismo era già presente negli orologi per la riduzione del moto. Poiché il numero di giri trasmesso da una ruota all'altra è legato al rapporto tra il numero di denti presenti sulle due ruote (*rapporto di trasmissione*), scegliendo un rapporto di trasmissione tra le due ruote di 1 : 10, quando la prima ruota avrà completato un intero giro, la seconda ruota sarà avanzata di 1/10, cioè di un'unità. Il probabile calcolatore disegnato da Leonardo da Vinci era basato su un approccio di questo tipo. Come abbiamo già detto, questo tipo di soluzione soffre in modo pesante del problema degli attriti e un calcolatore anche di poche cifre non potrebbe mai funzionare. Schickard e Pascal cercarono altre soluzioni per il meccanismo dei riporti. Gran parte del lavoro degli inventori di calcolatrici meccaniche fu dedicato al perfezionamento di questo meccanismo e al suo adattamento per l'esecuzione delle altre operazioni aritmetiche.

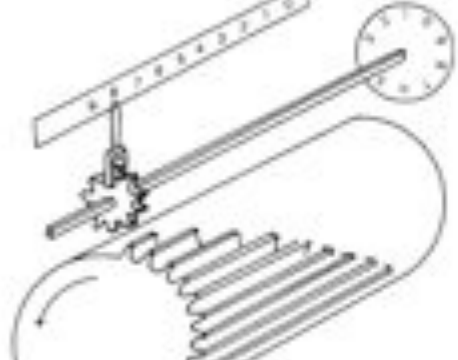
Calcolatrice di Leibniz

Wilhelm Leibniz.

Le calcolatrici di Schickard e di Pascal erano limitate alle operazioni di somma e sottrazione. A partire da questi dispositivi si cercò di perfezionare i meccanismi per poter effettuare altre operazioni matematiche.

Ricostruzione della calcolatrice di Leibniz.

Un primo passo fu l'aggiunta di un meccanismo per eseguire la moltiplicazione e la prima soluzione proposta per tale operazione fu data dal matematico e filosofo tedesco W. Leibniz (1646-1716) nel 1694. A proposito delle macchine da calcolo, Leibniz nel 1671 scriveva: non è degno di un uomo eminente perdere tante ore, come uno schiavo, in lavori di calcolo che chiunque potrebbe risolvere se venisse utilizzata una macchina.



Disegno della ruota di Leibniz, basata su un tamburo a gradini.

Un tale dispositivo permetteva di simulare una ruota dentata con un numero variabile di denti. Per eseguire le moltiplicazioni e le divisioni egli sfruttò un dispositivo che prese poi il nome di "*ruota di Leibniz*". In particolare, la moltiplicazione veniva eseguita per somme successive, mentre la divisione mediante sottrazioni successive. Purtroppo le difficoltà di costruzione della macchina e alcuni problemi nel funzionamento ne limitarono l'affidabilità e ne impedirono la diffusione. Per molto tempo, l'approccio di Leibniz rimase comunque l'unica soluzione per eseguire moltiplicazioni e divisioni.

Nel '600 e '700, le calcolatrici prodotte erano dei prototipi considerati come curiosità e la loro diffusione era assai limitata. Fu la rivoluzione industriale ad innescare l'effettiva richiesta di macchine da calcolo e quindi a spingere verso una loro produzione industriale. Da un lato, la rivoluzione industriale permise di realizzare calcolatrici affidabili in forma standardizzata, dall'altro lato la crescente industrializzazione della società fece aumentare l'esigenza di calcoli in campo tecnologico e in campo contabile. La prima calcolatrice ad essere prodotta in serie fu inventata dal francese Thomas de Colmar (1785-1870) nel 1820. Questa macchina (chiamata *aritmometro*) fu riprodotta in molti esemplari equivalenti fino agli anni '20. Sfruttando un principio del tutto simile a quello della ruota di Leibniz, questa calcolatrice eseguiva (oltre alla somma e alla differenza) moltiplicazioni e divisioni mediante una successione di addizioni e sottrazioni. Come nella macchina di Leibniz, per ottenere la moltiplicazione (o divisione) di due numeri un contagiri sull'asse della manovella di esecuzione registrava il numero di addizioni (o sottrazioni) successive effettuate. Questa calcolatrice a differenza dei modelli costruiti in precedenza rappresentò però un notevole passo in avanti dal punto di vista dell'affidabilità.

Calcolatrice meccanica Brunsviga.

Inizialmente, l'inserimento dei dati nelle calcolatrici meccanica era effettuato ruotando opportunamente delle ruote su cui erano riportate le cifre, come negli orologi.

Comptometer (ideato da Felt, nel 1884) una delle prime calcolatrici meccaniche per uso commerciale dotate di tastiera.

Attorno alla metà dell'800, grazie ai progressi della tecnologia meccanica, l'inserimento dei numeri cominciò ad essere effettuato mediante tasti come nelle attuali calcolatrici. Verso il 1850 l'italiano Tito Gonella inventò un primo prototipo di calcolatrice con la tastiera per l'inserimento dei numeri.

Calculations in the pre-computer era were done mechanically on the Frieden machine.

Verso il 1890 cominciarono ad apparire calcolatrici capaci anche di stampare su carta i risultati delle operazioni. Bisogna dire che le calcolatrici meccaniche ebbero maggiore successo nell'ambito della contabilità e del commercio, poiché in molti casi erano limitate alle quattro operazioni e, inoltre, erano più adatte per lavorare con numeri interi, sebbene non mancassero modelli in grado di operare con numeri non interi. Nel campo ingegneristico, alla calcolatrice venne invece preferito il regolo calcolatore.

Macchine Programmabili

Charles Babbage (intorno al 1847).

A partire dalla Pascalina, molti inventori cercarono di perfezionare i meccanismi di calcolo sotto diversi aspetti: (i) maggior numero di cifre con cui effettuare i calcoli, (ii) maggiore affidabilità, (iii) maggiore velocità di esecuzione e, (iv) meccanizzazione di nuove operazioni. Successivi perfezionamenti permisero di realizzare congegni in grado di svolgere non solo le quattro operazioni, ma anche altre operazioni come la radice quadrata. Anche nell'ambito dei calcolatori analogici non mancarono diversi miglioramenti che permisero di realizzare macchine in grado di risolvere problemi piuttosto complessi.

L'idea innovativa che permise di cambiare i calcolatori in modo radicale rispetto alle macchine sin qui esaminate è legata al concetto di *programmazione*, cioè alla possibilità di fornire in ingresso non solo i dati da elaborare, ma anche la sequenza di operazioni da eseguire sui dati. Al concetto di programmazione di un calcolatore si giunse solo nella prima metà del 1800 e il primo a comprendere il ruolo chiave di questo concetto nell'ambito dei calcolatori fu l'ingegnere e matematico inglese Charles Babbage.

Prima di esaminare l'opera di Babbage, vediamo quali furono i fattori che influenzarono Babbage portandolo a concepire il calcolatore programmabile. Tra questi fattori vanno segnalati il *meccanicismo* che caratterizzò il pensiero culturale del '700 e la *rivoluzione industriale* che contrassegnò l'enorme sviluppo economico e tecnologico della Gran Bretagna e più in generale dell'Europa a partire dalla seconda metà del '700.

Il famoso modello dell'anatra costruita da Vaucanson.

Il meccanicismo spiega il rinnovato interesse per la realizzazione di vari *automi meccanici* (i più comuni di tipo musicale). Sebbene questi automi non abbiano avuto una particolare importanza pratica, essi testimoniano la speciale attenzione rivolta verso l'automazione e il controllo di sequenze di operazioni. Il telaio Jacquard, assieme ad invenzioni ha aiutato Babbage a concepire il calcolatore programmabile.

Telaio Jacquard a schede perforate.

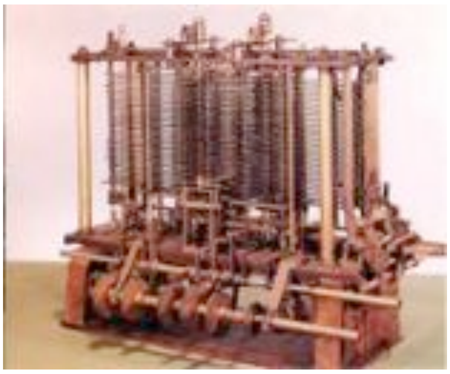
L'idea della programmazione la troviamo espressa anche nel *telaio Jacquard*: il telaio non solo è in grado di funzionare autonomamente grazie ad una propria forza interna (assicurata dal motore a vapore), ma può svolgere anche operazioni complesse grazie al controllo delle schede perforate.

Un testo del 1796 con le tavole logaritmiche.

Il problema originario che portò Charles Babbage (1791-1871) al concetto di calcolatore programmabile è quello della realizzazione di tavole matematiche precise e prive di errori. Egli, infatti, era particolarmente insoddisfatto di quelle disponibili a quel tempo poiché erano affette da numerosi errori di calcolo e di stampa. Le soluzioni con cui egli cercò di risolvere tale problema lo impegnarono praticamente per tutta la vita e segnarono la nascita del concetto di calcolatore programmabile. La realizzazione di una macchina di calcolo per stampare direttamente tavole matematiche avrebbe dovuto risolvere in un solo colpo i diversi problemi incontrati nella preparazione delle tavole. Il primo tentativo in tal senso è legato alla progettazione della Macchina delle Differenze (*Difference Engine*), a cui cominciò a pensare attorno al 1821. Questa macchina che avrebbe dovuto generare direttamente le tavole matematiche desiderate sfruttando un particolare metodo matematico di calcolo, il metodo delle *differenze finite*. Nonostante i numerosi tentativi, Babbage non riuscì mai a completare la realizzazione della macchina a causa delle numerose difficoltà tecniche per il montaggio dei componenti meccanici richiesti e per la notevole precisione meccanica necessaria nella preparazione di ogni singolo componente e, soprattutto, per la mancanza di fondi sufficienti. Curiosamente, una versione semplificata della macchina delle differenze fu invece progettata e realizzata dagli svedesi Georg e Edvard Sheutz (padre e figlio) nel 1834 i quali riuscirono a vendere alcuni modelli (in molti documenti invece di Sheutz si trova scritto Scheutz).

Una parte della macchina delle Differenze montata nel 1832.

Come abbiamo detto, al matematico ed ingegnere inglese Charles Babbage va il merito di essere stato il primo a proporre l'idea di un calcolatore di tipo programmabile. In particolare, questa idea si concretizzò nella progettazione della *Macchina Analitica* (*Analytical Engine*), macchina a cui cominciò a dedicarsi nel 1834, fallita l'esperienza con la Macchina delle Differenze. Questa nuova macchina doveva essere, nei progetti di Babbage, un calcolatore "programmabile", cioè uno strumento di calcolo "universale" le cui operazioni potevano essere di volta in volta specificate insieme ai dati da elaborare.



Una parte della Macchina Analitica in costruzione nel 1871.

Secondo il progetto (1836), la Macchina Analitica, azionata da un motore a vapore, avrebbe dovuto comporsi di quattro parti fondamentali: un'unità di calcolo (*mill*), la *memoria (store)*, la *sezione di ingresso* (lettore di schede perforate, ispirate a quelle dei telai Jacquard) e la *sezione di uscita* (stampa dei dati in uscita). La memoria per i numeri in ingresso e per i risultati intermedi sarebbe stata costituita da diverse colonne composte da ruote dentate in grado di raccogliere e contenere da 100 a 1000 numeri. Ogni colonna di ruote doveva permettere di memorizzare un numero di 50 cifre decimali. I dati venivano trasferiti dalla memoria all'unità di calcolo dove era possibile eseguire una delle quattro operazioni aritmetiche con un procedimento meccanico. L'idea di base è che il contenuto di una colonna poteva essere combinato in qualche modo con quello di un'altra colonna e il risultato collocato su una terza colonna.

Tutto il processo di calcolo doveva essere governato in modo opportuno con le schede perforate, idea presa a prestito dal telaio Jacquard. Le schede contenenti i dati iniziali o le costanti numeriche erano denominate da Babbage *number cards*; i fori di queste schede rappresentavano le diverse cifre di un numero. Un altro tipo di schede, le *variable card*, serviva per riferire la memoria: una variable card specificava la cella di memoria (cioé una data colonna di ruote) da cui prelevare un valore numerico da elaborare oppure in cui memorizzare un dato valore. Infine, le istruzioni per operare sui dati venivano specificate su schede perforate, denominate *operation cards*. Pertanto, la lettura delle schede avrebbe richiesto tre distinti lettori di schede.

Schede progettate da Babbage per la Macchina Analitica.

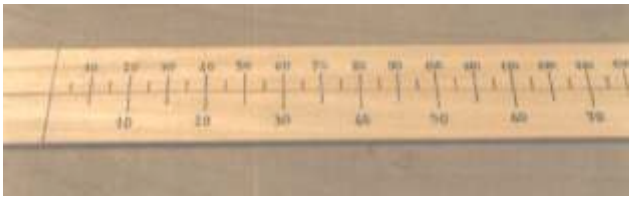
La Macchina Analitica rappresentò un progetto estremamente innovativo anche sotto il profilo della programmazione. Infatti, Babbage aveva immaginato non solo di eseguire sequenze lineari di istruzioni, ma aveva pianificato di dotarla di istruzioni di controllo per i *salti condizionati* (cioè, in base al verificarsi o meno di una data condizione possono essere eseguite sequenze diverse di istruzioni) e *istruzioni di ciclo* (per ripetere più volte una data sequenza di istruzioni).

La progettazione di questa macchina tenne occupato Babbage per molti anni, ma la complessità e la precisione richiesta per i suoi meccanismi e la mancanza di fondi resero impossibile la realizzazione concreta di tale strumento e, infatti, Babbage morirà senza poter vedere realizzato il suo sogno. Purtroppo, il lavoro di Babbage e il suo concetto di macchina programmabile fu in seguito dimenticato quasi del tutto e dovette essere praticamente riscoperto un secolo più tardi, nell'età eroica del calcolatore elettronico.

Ada di Lovelace.

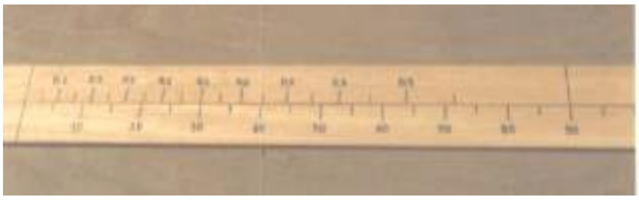
Nel suo lavoro sulla Macchina Analitica, Babbage fu aiutato da Ada Augusta Byron (1815-1852), contessa di Lovelace, figlia del famoso poeta inglese Lord George Byron. Lady Lovelace collaborò con Babbage seguendo i progetti della Macchina Analitica ed elaborando numerosi ed importanti commenti sul concetto di programmazione. Anche se la Macchina Analitica non fu mai realizzata, Lady Lovelace scrisse i primi programmi per il funzionamento di questa macchina. In queste note sulla Macchina Analitica, Ada di Lovelace si spingerà ad immaginare per questa macchina non solo calcoli di tipo numerico, ma anche attività come il calcolo simbolico e perfino la composizione automatica di musica.

Regoli graduati



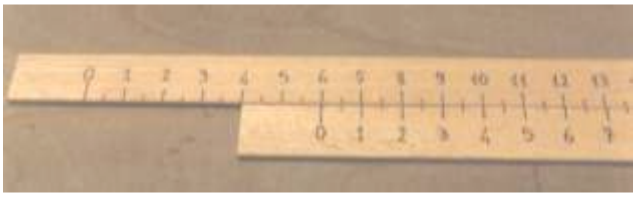
Regoli di duplicazione.

Una coppia di regoli dotati di opportune scale permette di effettuare diversi tipi di calcoli. In particolare, possiamo: fare il raffronto di due scale vicine fisse; muovere un righello rispetto all'altro. Questi sono i meccanismi basilari per la costruzione di diversi strumenti analogici impiegati nel passato. Ad esempio, consideriamo una coppia di regoli fissi le cui scale siano una doppia dell'altra: in questo caso è possibile moltiplicare o dividere per due un dato numero. Questo principio è ancora oggi alla base degli scalimetri (che vedremo tra poco).



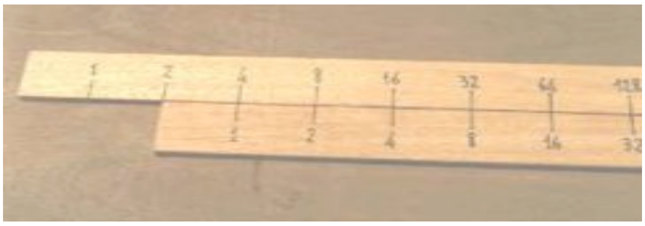
Regoli per calcolare la funzione seno.

Con una coppia di regoli fissi dove una scala contiene valori della funzione *seno* e l'altra contiene la misura degli angoli è possibile calcolare il seno di un angolo oppure calcolare la funzione inversa arcoseno. Il limite di questo approccio è quello di essere utilizzabile unicamente per funzioni matematiche ad un solo argomento. Si deve notare che con questo strumento il calcolo di una funzione (ad esempio, il quadrato di un numero) e della funzione inversa (ad esempio, la radice quadrata) comporta lo stesso grado di difficoltà.



Regoli addizionatori.

Utilizzando due scale metriche uguali incise su due righelli liberi di scorrere l'uno rispetto all'altro, è possibile invece realizzare un semplicissimo strumento per effettuare somme e sottrazioni. Ad esempio, dovendo sommare 6,0 con 5,5, si sposta il righello mobile in modo che lo zero della sua scala coincida con il valore 6,0 nella scala del righello fisso; quindi, sempre nella scala del righello mobile si cerca il valore 5,5; infine, il risultato della somma (cioè 11,5) può essere letto sulla scala del righello fisso in corrispondenza del numero 5,5. Con un metodo inverso a quello descritto è possibile effettuare l'operazione di differenza.



Regoli moltiplicatori.

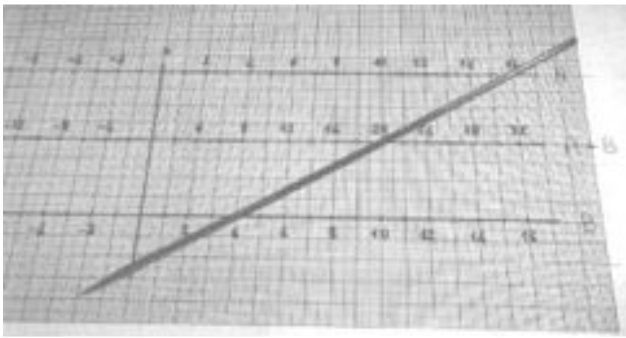
I due righelli riportano le potenze di due: spostando un righello rispetto all'altro è possibile ricavare il prodotto di una coppia di potenze (di 2). Nella figura possiamo moltiplicare il numero 4 per un'altra potenza di 2. Usando un altro tipo di scala è possibile eseguire anche le moltiplicazioni. Il principio che permette di fare la moltiplicazione in questo caso è riconducibile alle proprietà delle potenze e, in particolare, all'additività degli esponenti con potenze con la stessa base. Questo principio opportunamente raffinato ha trovato larga diffusione nell'ambito dei regoli calcolatori, dove utilizzando scale di tipo logaritmico, si riesce ad eseguire operazioni più complesse dell'addizione della sottrazione.

Scalimetro

Fig. 1. Scalimetro.

Lo scalimetro è uno strumento particolare per la misurazione di distanze sulle cartine geografiche. Non sappiamo quando questo strumento sia stato inventato, ma probabilmente si è diffuso a partire dal 1500 quando sono iniziate le grandi esplorazioni geografiche. Questo strumento permette di leggere direttamente le distanze reali sulla cartina evitando i calcoli necessari per la conversione di scala. In pratica, lo scalimetro permette all'utente di convertire le misurazioni sulla carta in distanze senza dover fare le moltiplicazioni richieste per passare dai centimetri della cartina geografica alle distanze reali (generalmente in metri o chilometri). Ogni scalimetro è di solito predisposto per lavorare con diverse rapporti di scala.

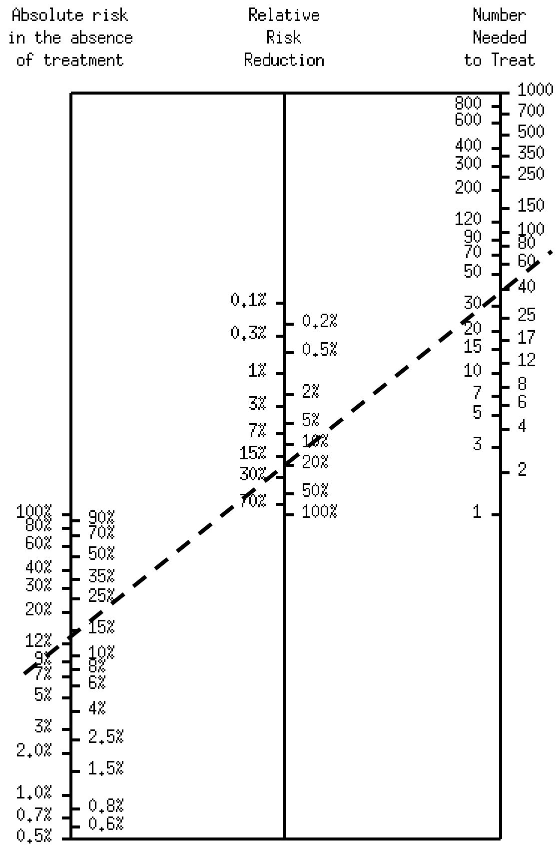
Nomogramma lineare



Nomogramma lineare.

Il nomogramma lineare è uno strumento molto semplice che permette di sommare due numeri. E' formato da tre scale lineari equidistanti. Con un righello si congiungono i due valori da sommare riportati sulle due scale esterne. Il punto in cui il righello taglia la scala intermedia fornisce la somma dei due numeri. Ad esempio, nella figura l'asta congiungente i valori 16 e 4 (rispettivamente sulla scala superiore e su quella inferiore) taglia la scala intermedia nel valore 20, somma dei due valori esterni. Il principio di funzionamento di questo strumento è legato al concetto di punto medio: quando le tre scale sono equidistanti, il righello taglia sempre la scala intermedia nel punto medio m di due valori a, b scelti sulle scale esterne, ossia, in termini numerici, $m = a + b/2$. Se la scala centrale è doppia di quelle esterne, allora invece di fornire il valor medio di a e b, fornirà la somma $a + b$.

Ovviamente, è possibile usare lo strumento anche per effettuare la differenza tra due numeri.



Nomogramma per uso medico.

Se invece delle scale lineari si usano altre scale è possibile sfruttare lo strumento per eseguire altre operazioni. In campo medico i nomogrammi vengono spesso utilizzati per descrivere funzioni dipendenti da due parametri.

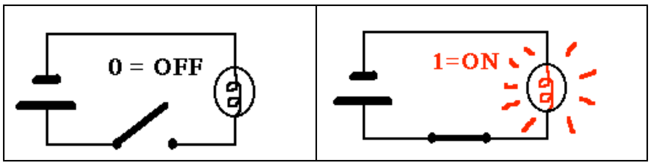
I mattoni elementari del computer

Una calcolatrice elettromeccanica (Olivetti anni '60).

All'inizio del '900 vengono prodotte le prime calcolatrici elettromeccaniche, che pur conservando lo stesso principio di funzionamento delle precedenti calcolatrici meccaniche, sono azionate elettricamente. Una delle prime calcolatrici azionate da un motore elettrico è del 1911. Dal punto di vista del funzionamento, la loro architettura è del tutto simile a quella delle calcolatrici meccaniche: in queste calcolatrici la rappresentazione dei numeri e la loro elaborazione è ancora interamente di tipo meccanico. Le calcolatrici elettromeccaniche verranno perfezionate in diversi modi rendendo più rapido ed affidabile il calcolo e saranno utilizzate fino agli anni '70, quando verranno sostituite dalle calcolatrici elettroniche tascabili e dai computer programmabili.

A partire dal 1910 ci furono numerosi inventori che sperimentarono la nuova tecnologia elettromeccanica o elettronica mettendo a punto importanti idee, talvolta molto ingegnose nell'ambito del calcolo. Nessuno di questi però cercò di studiare sistematicamente la teoria dei circuiti elettrici alla base di queste invenzioni: il primo (o, meglio, il più noto) a compiere questo passo che si sarebbe rivelato importante per lo sviluppo dei successivi computer elettronici fu il fisico e matematico americano Claude Shannon (1916-2002). Nel 1938, studiando i circuiti elettrici a relè comunemente utilizzati nelle telecomunicazioni, egli si rese conto che il loro funzionamento poteva essere descritto in termini logici utilizzando il calcolo proposizionale. Anche se nel suo lavoro non si parla ancora di computer, ma ci si limita a menzionare complessi sistemi di controllo automatici, le idee da lui elaborate si riveleranno fondamentali alcuni anni dopo per la progettazione dei circuiti logici di calcolo caratterizzanti i computer elettronici. Il contributo fondamentale di Shannon fu soprattutto quello di introdurre un metodo sistematico per progettare reti logiche (si parla *sintesi di reti logiche*) capaci di eseguire le operazioni logico-aritmetiche desiderate. In un certo senso, egli mostrò come trasformare una data operazione matematica in un circuito elettrico costruito semplicemente con interruttori e relè di commutazione.

Le informazioni sono rappresentate essenzialmente mediante il passaggio o non passaggio di segnali elettrici, controllati semplicemente da interruttori aperti e chiusi. Pochi anni più tardi l'insieme dei due possibili stati di questi circuiti verrà riconosciuta come l'informazione minimale di un sistema in grado elaborare informazioni e, come sappiamo, prenderà il nome di *bit*.



Circuito elementare per la rappresentazione di un bit.

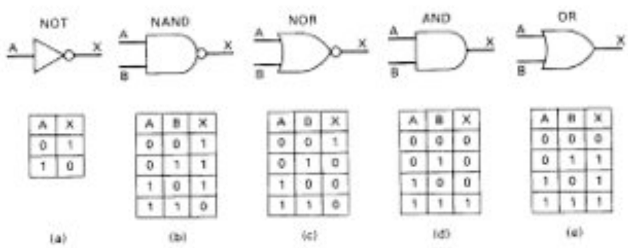
Fin dalle prime pagine egli mette subito in corrispondenza i circuiti elementari con i tre operatori booleani di base:

- due interruttori in serie possono essere interpretati come una congiunzione logica;
- due interruttori in parallelo corrispondono invece alla disgiunzione logica; infine
- un interruttore che inverte lo stato di un segnale X d'ingresso, corrisponde alla negazione logica e viene indicato simbolicamente con la scrittura X'.

Oggi questi stessi circuiti di base prendono il nome di *porte logiche*.

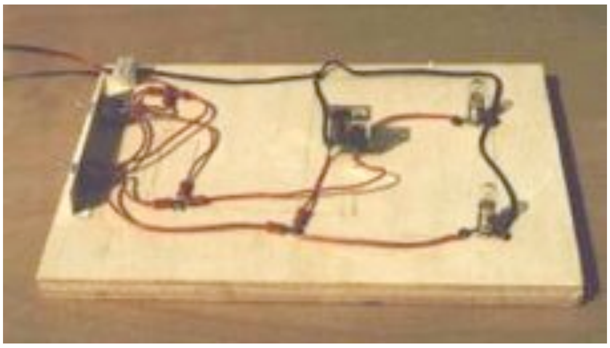
Esempio di circuito di commutazione con due interruttori in parallelo, denominata porta OR.

Il comportamento di ogni porta logica è definito in modo completo dalla *tabella di verità* che descrive le uscite della porta in funzione dei possibili ingressi.



Le porte AND e OR sono caratterizzate da due ingressi e un'uscita (operatori di tipo binario); la porta NOT (chiamata anche *inverter*) ha un solo ingresso e una sola uscita.

Ogni porta logica elabora uno o più bit secondo una determinata operazione logica. Infatti, se conveniamo di associare il valore "vero" al passaggio di corrente elettrica e il valore "falso" al non passaggio di corrente elettrica, allora i circuiti che logici elettrici costituiscono una rappresentazione concreta della logica proposizionale.



Addizionatore binario (half-adder) realizzato con un relè.

Le reti logiche hanno il compito di elaborare le informazioni rappresentate in forma binaria e vengono realizzate combinando insieme diverse porte logiche. Il comportamento di una rete combinatoria è completamente noto se per ciascuna combinazione dei valori degli ingressi è conosciuta la corrispondente combinazione dei valori in uscita. In questo contesto, l'aritmetica binaria è di gran lunga preferibile a quella decimale. Le potenzialità di questi circuiti nell'ambito del calcolo aritmetico erano ovviamente ben chiare a Shannon e tra i suoi esempi è incluso il progetto di un addizionatore binario basato sulle reti logiche. In definitiva il lavoro di Shannon diede avvio allo studio di tutte quelle tecniche indispensabili per progettare in modo sistematico tutti i circuiti logici di base necessari per realizzare i circuiti di calcolo necessari per i futuri computer.

Interruttore domestico per l'illuminazione: la commutazi**one dell'interruttore deve essere eseguita** manualmente.

- L'interruttore di corrente elettrica costituisce il **"mattone"** elementare utilizzato per manipolare le informazioni e con esso vengono realizzate in definitiva tutte le reti logiche.
- Naturalmente, l'uso di semplici interruttori come quelli per l'illuminazione non permette di costruire le unità di elaborazione di un computer: nell'interruttore domestico l'azione di accendere o spegnere deve essere eseguita manualmente con un dito.
- Quello che manca ad un simile dispositivo è il controllo automatico mediante un segnale elettrico per fare passare l'interruttore da uno stato all'altro (*commutazione*).

Nei sei decenni che ci separano dai primi computer elettronici questo componente è cambiato parecchio determinando diverse generazioni di computer.

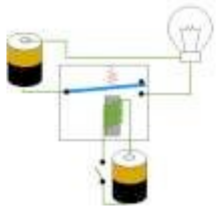
Le diverse generazioni dei computer

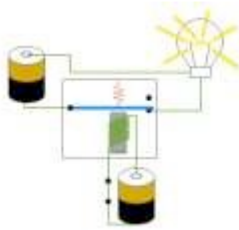
Dal punto di vista tecnologico, lo sviluppo delle unità centrali di elaborazione (CPU) viene generalmente suddiviso in cinque diverse generazioni a seconda il tipo di tecnologia impiegata per la realizzazione delle reti logiche:

- *generazione zero*: i computer adottano ancora una tecnologia elettromeccanica;
- *prima generazione*: i computer adottano la tecnologia delle valvole termoioniche (tubi elettronici);
- *seconda generazione*: i computer adottano la tecnologia dei transistor;
- *terza generazione*: i computer adottano la tecnologia dei primi circuiti integrati;
- *quarta generazione*: i computer adottano la tecnologia dei circuiti integrati ad alta densità di componenti; è questa la generazione degli attuali computer.

Relé elettromeccanico

Il relè elettromeccanico è probabilmente il meccanismo più semplice che consente di automatizzare l'apertura e la chiusura di un interruttore e, per questa ragione, è stato il primo componente scelto per realizzare le reti logiche nei computer.





In questo dispositivo uno o più interruttori possono essere aperti o chiusi, in dipendenza di un segnale elettrico di comando. Nei relè elettromagnetici un'ancoretta mobile di materiale ferromagnetico viene attratta da una bobina (elettrocalamita), quando questa è percorsa da corrente, provocando lo spostamento dei contatti dell'interruttore. Quando la corrente elettrica cessa di circolare nell'elettrocalamita, una molla riporta i contatti dell'interruttore nello stato iniziali.

I primi computer (programmabili) a relè furono lo Z2 realizzato da Zuse e l'Harvard Mark 1 realizzato da Aiken, anche se già in precedenza Torres y Quevedo e altri avevano sperimentato l'uso dei relè in alcuni dispositivi di calcolo (non programmabili).

Il computer Z3 di K. Zuse ricostruzione.

Valvole termoioniche

Per migliorare la velocità di calcolo dei computer i relè furono subito sostituiti dalle *valvole termoioniche* (o *tubi elettronici*), capaci di svolgere un ruolo simile. Esistono numerosi tipi di valvole con diverse funzioni. Il triodo può essere utilizzato come un interruttore automatico: con un'opportuna tensione sulla griglia è possibile attivare o disattivare la corrente elettrica tra catodo e anodo.

Una valvola dello stesso tipo (6SN7) di quelle utilizzate nell'ENIAC per la realizzazione dei flip-flop.

Nell'ambito dei computer, il triodo può essere utilizzato come semplice interruttore controllato da un segnale elettrico. La maggiore velocità di commutazione delle valvole termoioniche deriva dal fatto che il dispositivo non contiene parti meccaniche in movimento, ma l'apertura e la chiusura dell'interruttore è controllata dalla sola presenza della tensione elettrica sulla griglia. Una valvola elettronica può raggiungere facilmente tempi di commutazione di 1/1.000.000 di secondo. I computer a valvole costituirono un miglioramento rispetto a quelli a relè in termini di velocità di calcolo ma non in termini di spazio. Pertanto, anche i computer a valvole (ad esempio, i computer ABC, ENIAC, EDSAC, UNIVAC, ecc.) erano di grandi dimensioni a causa del notevole numero di valvole impiegate. Infatti, un computer contenente migliaia di valvole poteva occupare un'intera stanza di grandi dimensioni. Un computer a valvole era caratterizzato anche da un notevole consumo di corrente elettrica: ogni singola valvola poteva consumare infatti 5-15 watt. Infine, un grave inconveniente delle valvole termoioniche era legato alla loro scarsa affidabilità in termini di durata. Infatti, il notevole numero di valvole impiegate in un computer faceva sì che mediamente i guasti in tali macchine fossero particolarmente frequenti (talvolta a distanza di poche ore).

Transistor

Il transistor è un dispositivo elettronico fondamentale e fu scoperto nel dicembre del 1947 da W. Shockley, W. Bardeen e W. Brattain presso i laboratori della Bell Telephone.

Il primo transistor realizzato nei laboratori della Bell.

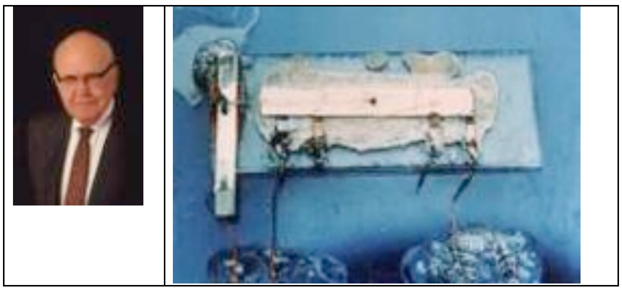
L'introduzione del transistor ha rivoluzionato completamente il settore elettronico aprendo la strada a tutti i moderni dispositivi elettronici. Il transistor venne ben presto utilizzato in sostituzione dei tubi elettronici, rispetto ai quali presenta diversi vantaggi:

- dimensioni molto inferiori che rendono possibile la realizzazione di circuiti miniaturizzati,
- potenza dissipata molto minore,
- tensione di lavoro più bassa (pochi volt contro le centinaia di volt necessari per i tubi),
- dispersione di calore molto inferiore,
- durata senza degradazione delle prestazioni praticamente illimitata,
- maggiore affidabilità,
- infine costi assai più limitati.

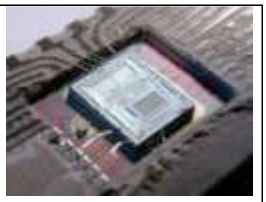
I primi transistor potevano facilmente raggiungere tempi di commutazione di 1/100.000.000 di secondo.

I primi computer realizzati interamente con i transistor furono il prototipo Computer Transistor sviluppato presso l'Università di Manchester nel 1953 (parzialmente transistorizzato), il TRADIC (realizzato negli Stati Uniti presso i Bell Telephone Laboratories nel 1955), il computer inglese Harwell CADET operativo nel 1955, il computer giapponese ETL Mark III realizzato nel 1956 e il TX-0 (realizzato presso il MIT, nel 1956). In pochi anni l'introduzione del transistor rivoluzionò i computer e alla fine degli anni '50 i computer a valvole termoioniche erano stati rimpiazzati completamente da quelli a transistor.

Circuiti integrati



Nel 1958, l'ingegnere americano Jack C. Kilby della Texas Instruments aprì l'era della miniaturizzazione dei circuiti elettronici con l'invenzione del circuito integrato. Kilby riuscì a combinare diversi componenti elettronici (transistor, diodi, resistenze, ecc.) su una piastrina di germanio di dimensioni più piccole di un francobollo. Successivamente nel 1959 l'americano Robert Noyce perfezionò le tecniche di sviluppo dei circuiti integrati. Alla fine degli anni '60 fondò (insieme a Gordon E. Moore) la Intel, una delle case produttrici di circuiti integrati più importanti. L'invenzione di Kilby permise di compattare in poco spazio circuiti elettronici complessi che prima occupavano un intero armadio. Anche la conquista della luna poté beneficiare dell'invenzione dei circuiti integrati sia per tutte le attrezzature di supporto a terra, sia per quelle a bordo dove gli spazi e la leggerezza ponevano limitazioni molto strette.

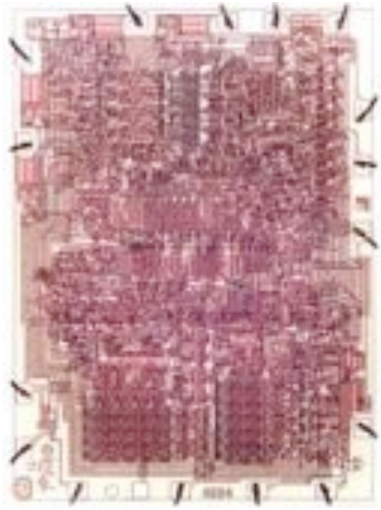


I primi circuiti integrati usati per realizzare computer comprendevano solo alcune porte logiche. Via via che il procedimento di integrazione si perfezionò, si ottennero circuiti integrati sempre più ricchi di componenti e dalle funzioni più complesse, grazie ad una miniaturizzazione sempre più spinta. La miniaturizzazione dei circuiti **integrati cambiò in modo sensibile l'ordine di grandezza del** numero di elementi che compongono un processore raggiungendo livelli impensabili per le valvole termoioniche. Nonostante le enormi difficoltà tecniche da affrontare per miniaturizzare i circuiti elettronici, il numero transistor che negli anni si è riuscito ad inserire sul chip di un singolo circuito integrato è aumentato in modo esponenziale.

Il microprocessore

Nel 1971, tre ingegneri della Intel, Federico Faggin (di origine italiana), Ted Hoff e Stan Mazor, progettarono e realizzarono il primo *microprocessore*, cioè un'intera CPU (processore) in un singolo circuito integrato. Fino a quel momento per soddisfare le differenti richieste dei clienti (industrie di prodotti elettronici) venivano costruiti circuiti integrati diversi. I tre inventori si resero conto che era molto più economico progettare e fabbricare un unico tipo di circuito integrato "generico" e poi specializzarlo con un opportuno software memorizzato anch'esso su una memoria a circuiti integrati. In particolare realizzando come circuito integrato un'intera CPU era possibile garantirsi la massima generalità potendo eseguire qualunque funzione richiesta dai clienti.

Su una piastrina 4 × 3 mm riuscirono ad inserire 2.250 transistor, che formavano il cuore di un intero computer in grado di elaborare in parallelo 4 bit, con un clock di 108 kHz. Questo microprocessore fu denominato Intel 4004. La capacità di elaborazione, 60.000 operazioni al secondo, era già superiore all'ENIAC del 1946 e ai computer dei primi anni '60 con un'unità centrale grande come un tavolo. Al microprocessore Intel 4004 seguirà nel 1972 il microprocessore 8008, a 8 bit.



Microprocessore Intel 4004.

Attualmente, in un personal computer sia la CPU (microprocessore) sia gran parte dei dispositivi indispensabili per l'attività della CPU possono essere realizzati con la tecnologia dei circuiti integrati, i quali possono essere disposti in una singola scheda, detta *scheda madre*. Questa si può considerare la parte più importante di un computer.

Grazie ai circuiti integrati, nel giro di un decennio le cose cambiarono radicalmente per l'uomo della strada: dapprima le calcolatrici elettroniche e poi i computer sono diventati strumenti di studio, di lavoro e di ricerca alla portata di tutti. Il personal computer ha trasformato in modo radicale la nostra società aprendo l'era dell'informatizzazione di massa.

Il primo personal computer.

ISTITUTO E MUSEO
DI STORIA DELLA SCIENZA

COME COSTRUIRE IL COMPASSO DI GALILEO

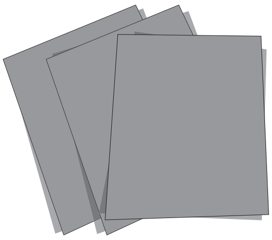
INTRODUZIONE

Il compasso geometrico e militare di Galileo è uno strumento molto semplice da costruire anche con materiali poveri!
Occorre solo un po' di buona volontà.

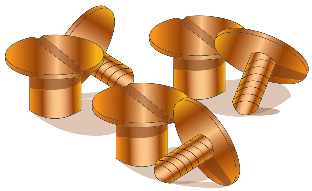
Segui passo dopo passo le istruzioni che ti suggeriamo e potrai costruirlo in modo semplice e veloce.

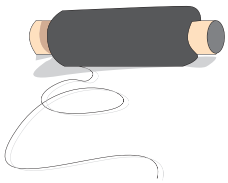
MATERIALE OCCORRENTE

- n. 2-3 fogli (21 x 29.7) di cartoncino dello spessore di circa 1-1.5 mm che puoi trovare in una normale cartoleria;

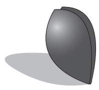


- n. 3 viti da rilegatura con maschio e femmina che puoi trovare in una cartoleria o in una ferramenta;

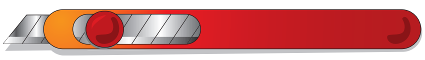




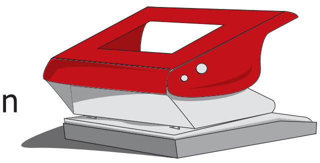
- del filo resistente (tipo da occhiello);
- un piombino da pesca;



- un taglierino;



- un paio di forbici;



- qualcosa per praticare fori sul cartoncino (es. un forafogli, oppure un punteruolo);

- della colla resistente (Vinavil).

Tavola 1

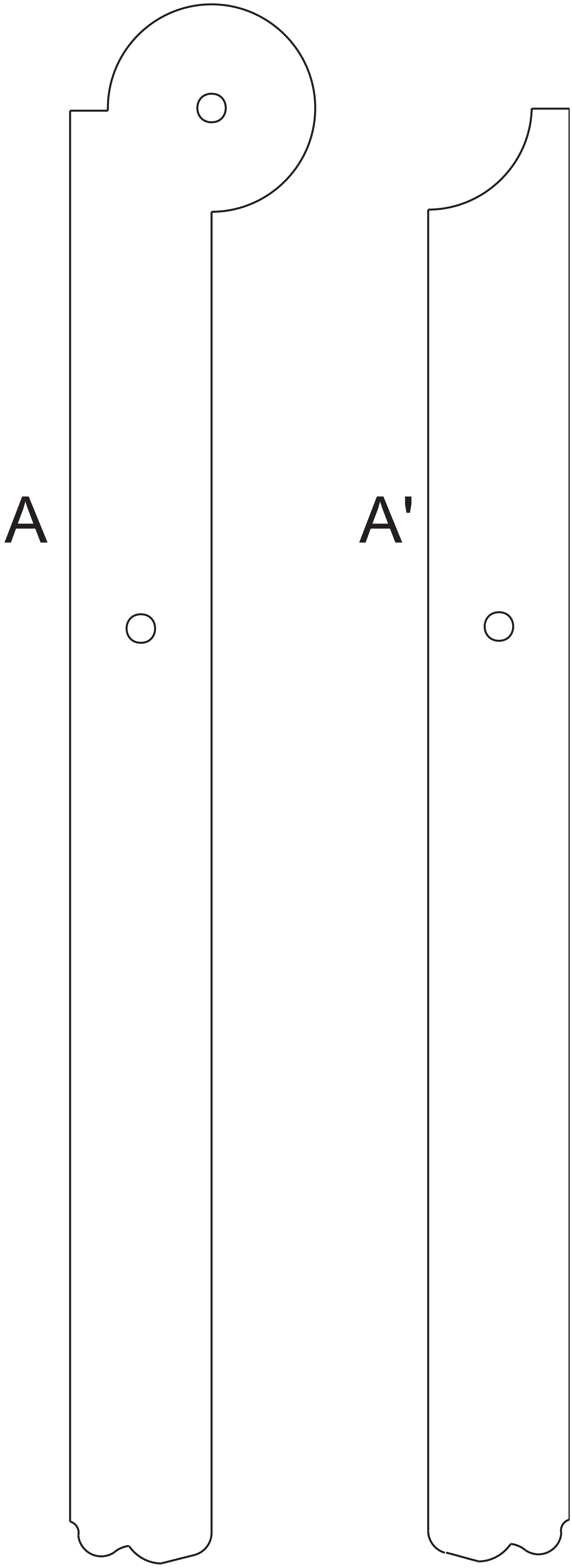


Tavola 2

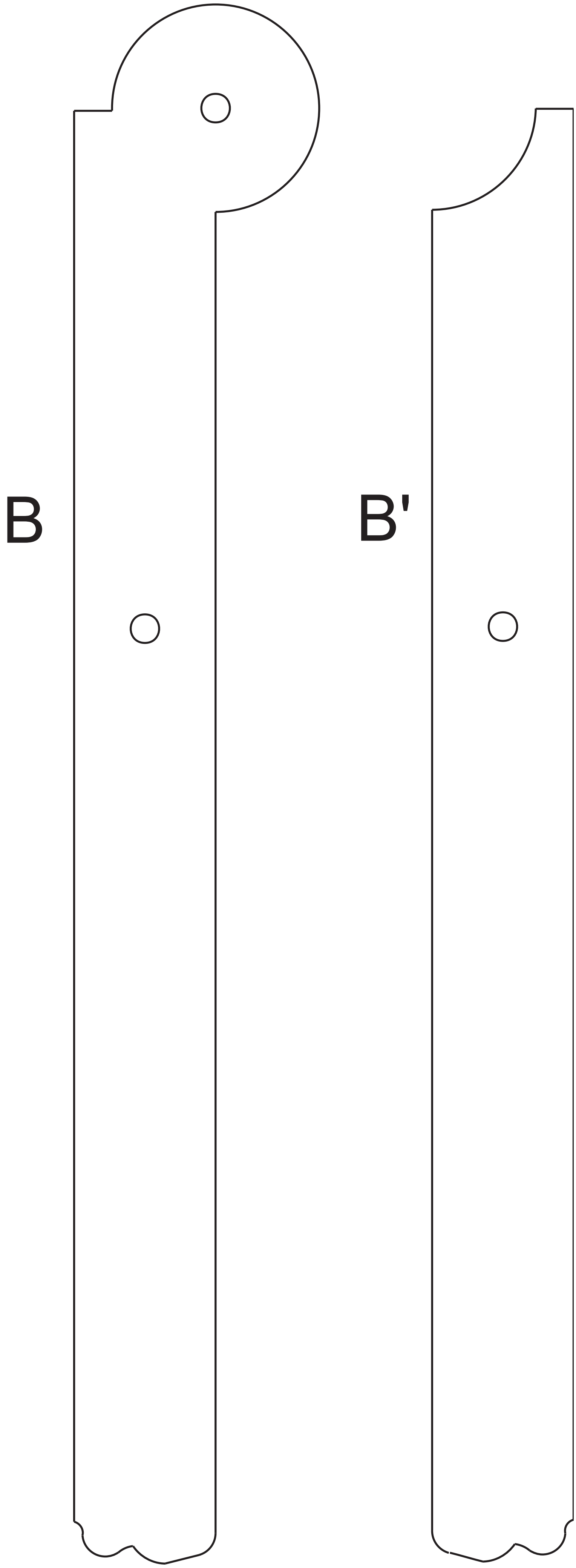
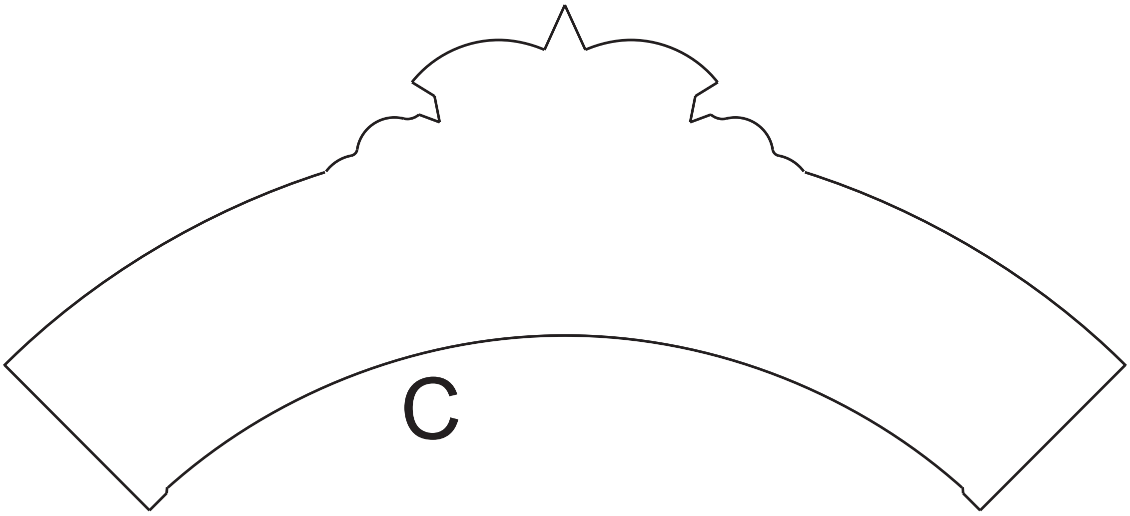
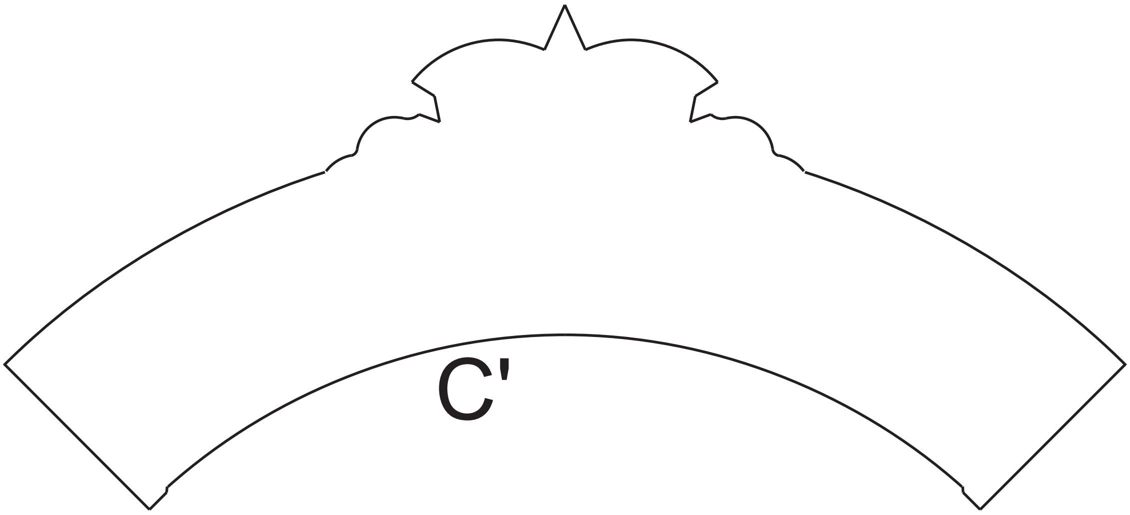


Tavola 3





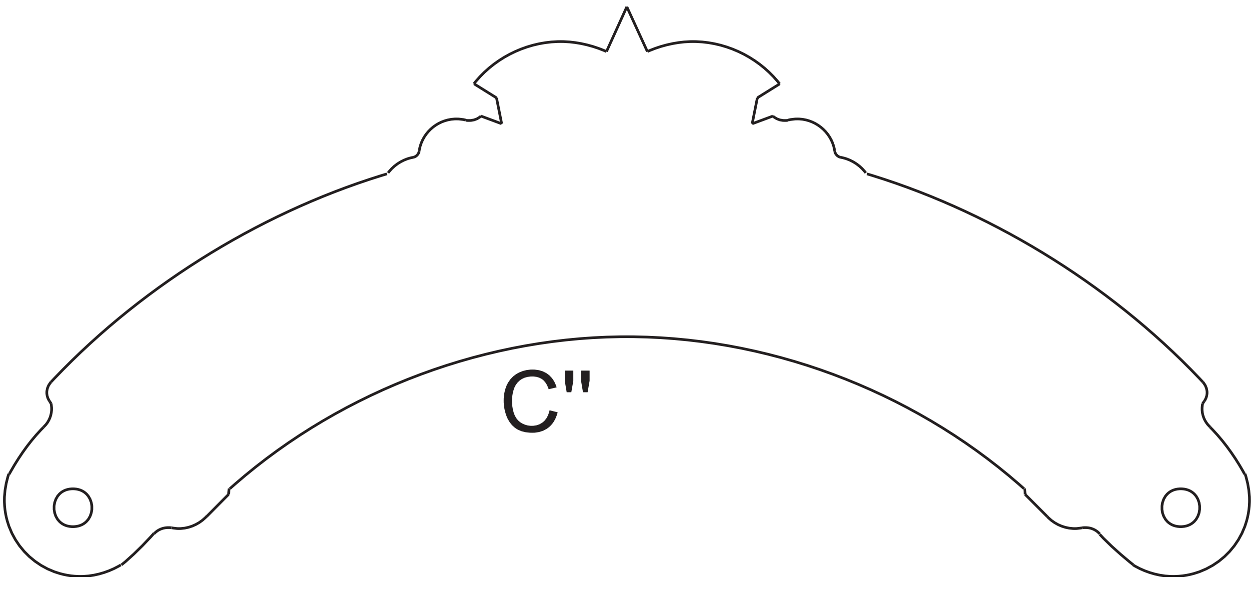
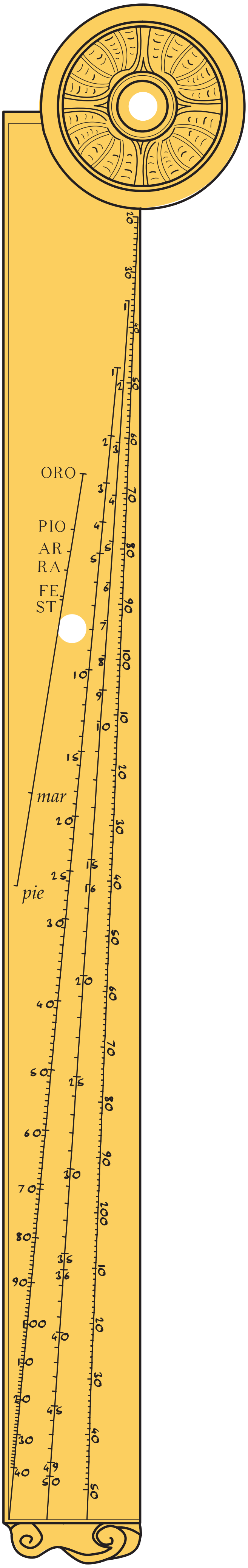


Tavola 4

Recto sx



Recto dx

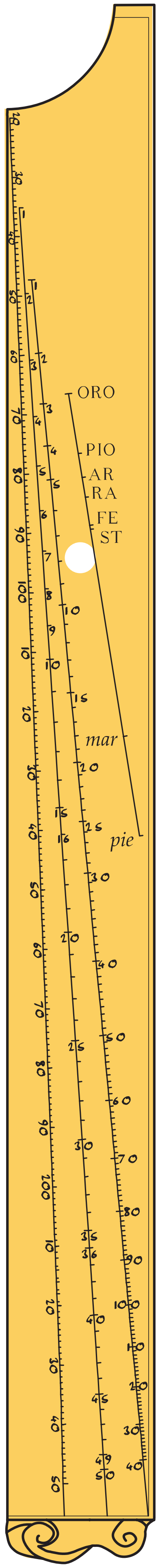
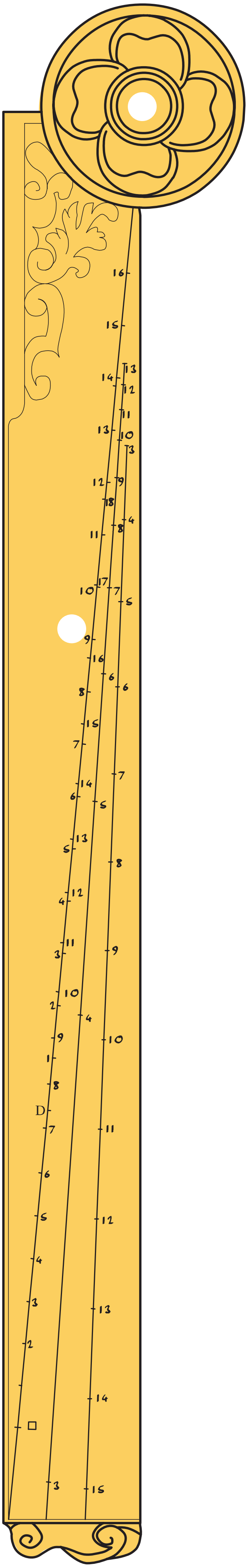


Tavola 5

Verso sx



Verso dx

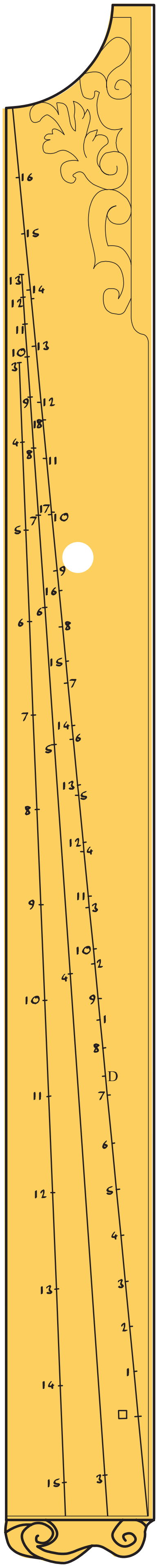


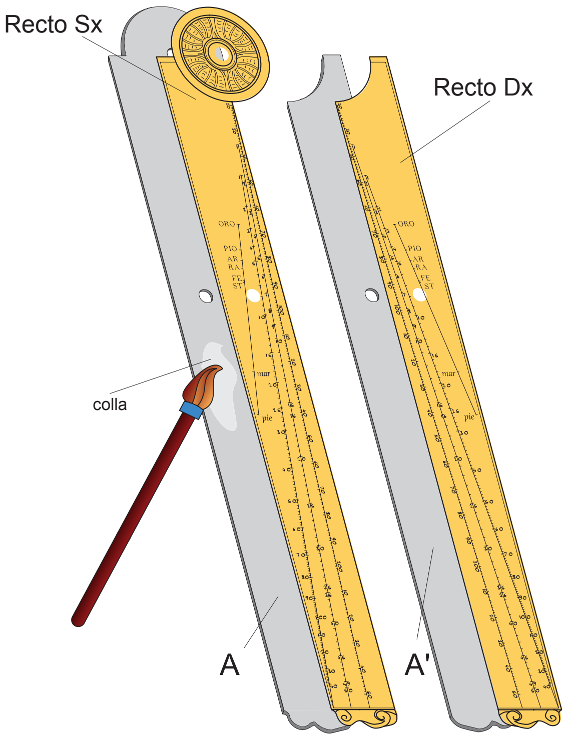
Tavola 6

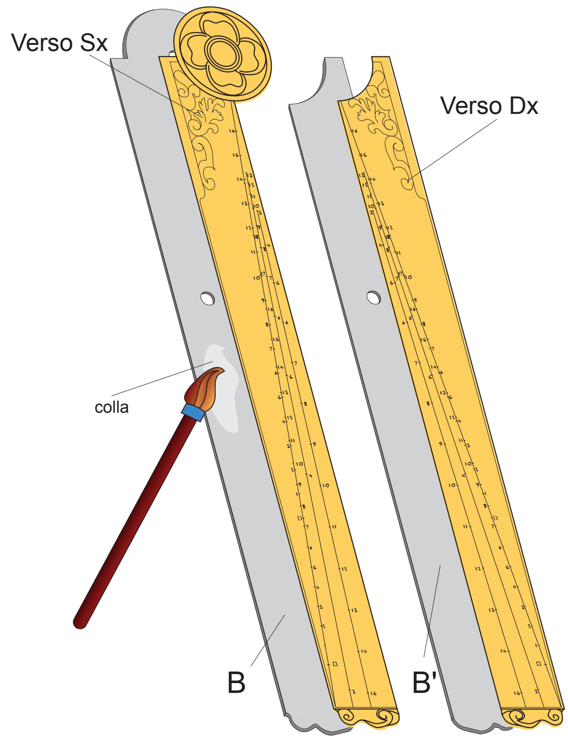
Quadrante recto

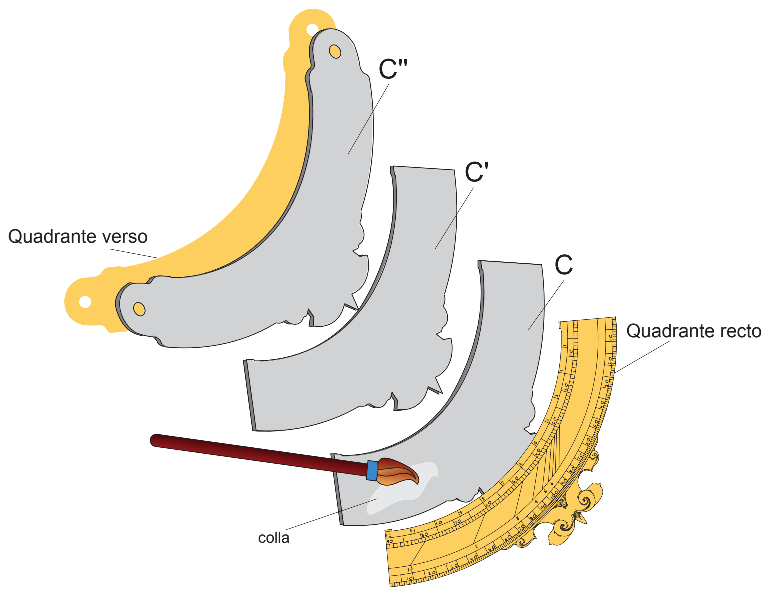
Quadrante verso

REALIZZAZIONE E MONTAGGIO DEI PEZZI

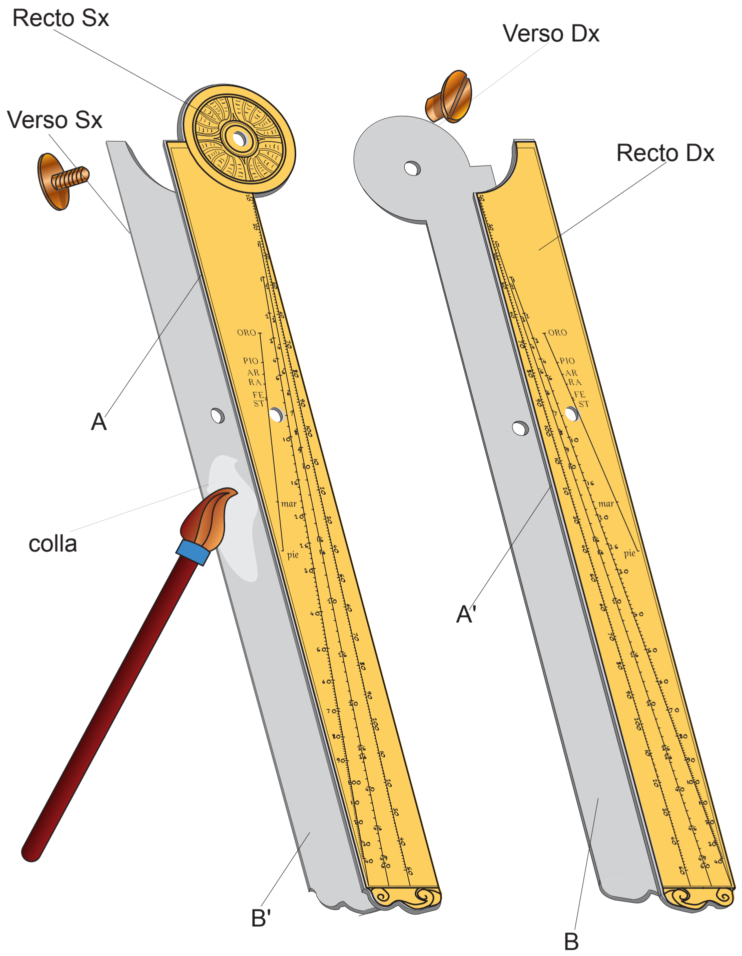
1. Stampa tutto il presente documento con una comune stampante (preferibilmente a colori);
2. con le forbici ritaglia le sagome (**A**, **A′**, **B**, **B′**, **C**, **C′**, **C″**, **RectoSx**, **RectoDx**, **VersoSx**, **VersoDx, Quadrante recto, Quadrante verso**) disegnate da Tavola 1 a Tavola 3 di questo documento, ricordandoti di praticare i fori in corrispondenza dei cerchietti;
3. posiziona le sagome (**A**, **A′**, **B**, **B′**, **C**, **C′**, **C″**) sui fogli di cartoncino, facendo attenzione che il cartoncino sia sufficiente per tutte e 7 le sagome; ritaglia, quindi, il cartoncino seguendo le sagome con precisione;
4. a questo punto puoi mettere via le sagome (**A**, **A′**, **B**, **B′**, **C**, **C′**, **C″**) di carta e procedere ad incollare quelle in cartoncino con le sagome disegnate (**RectoSx**, **RectoDx**, **VersoSx**, **VersoDx, Quadrante recto, Quadrante verso**) disponendo i pezzi nel modo che segue:

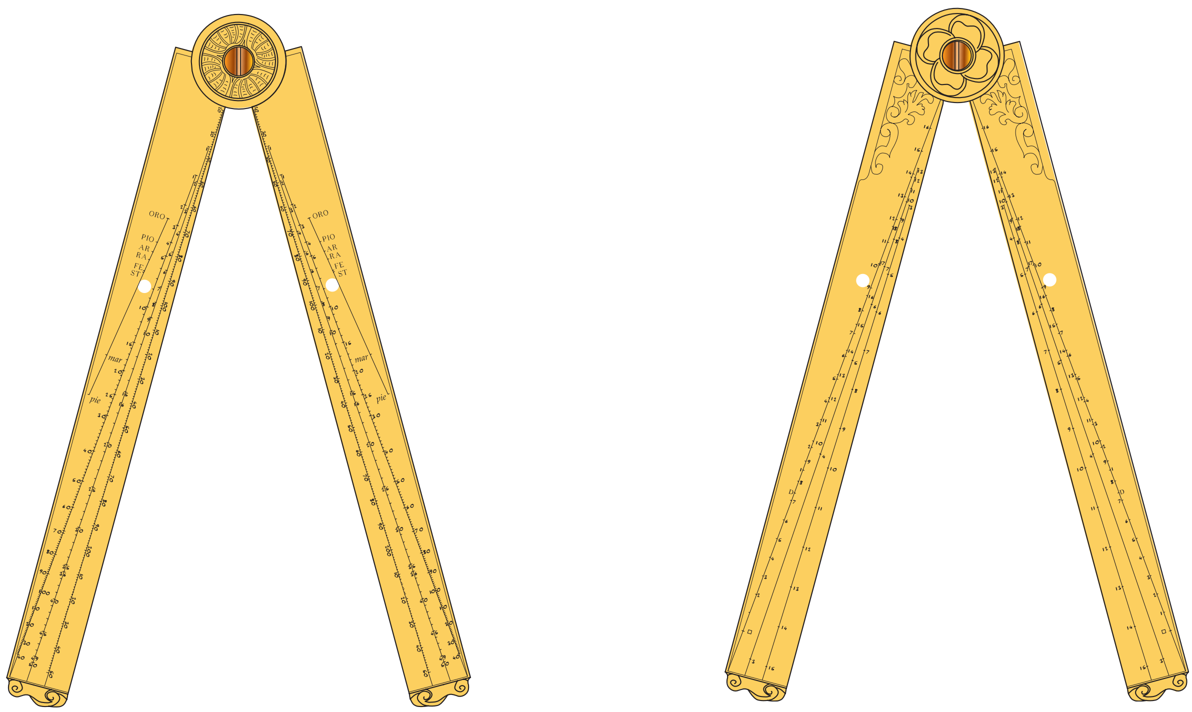




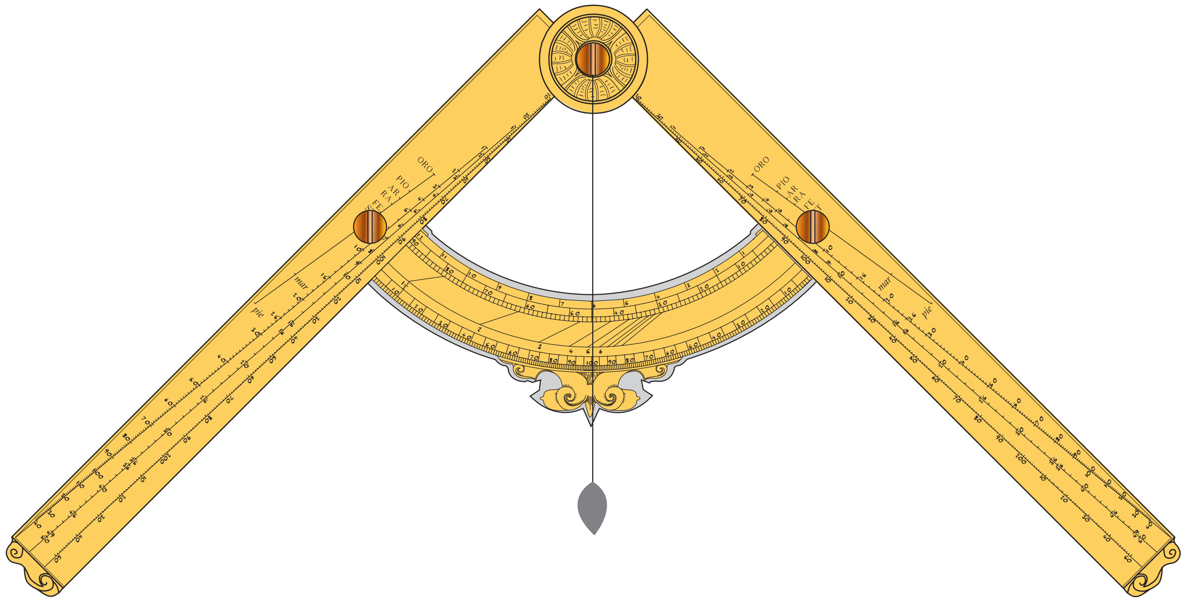


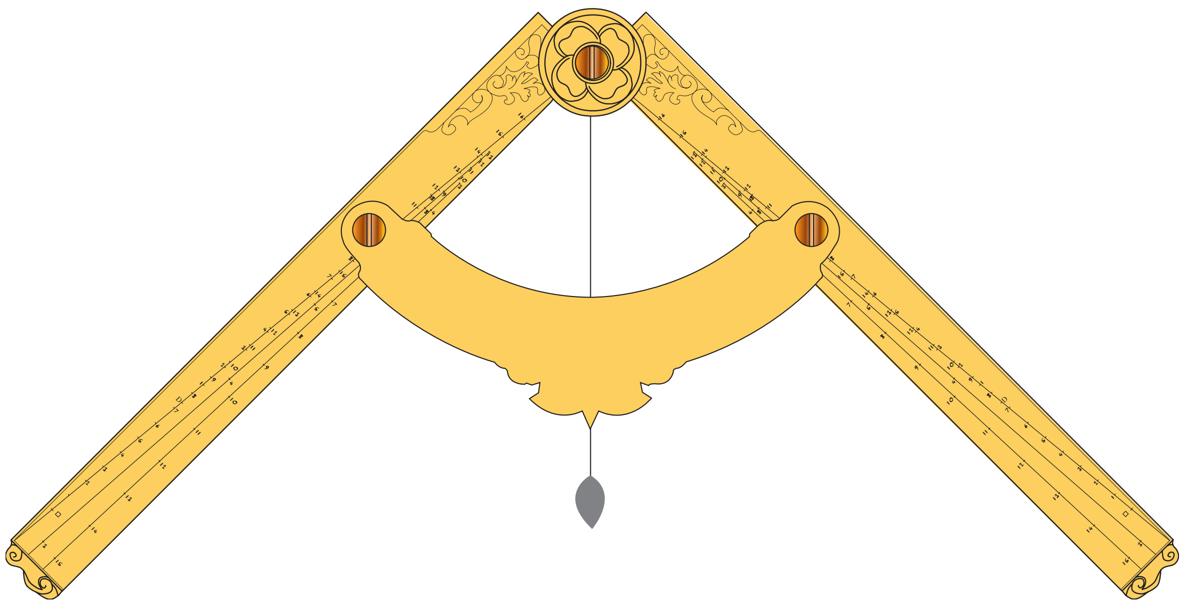
5. Quando la colla ha fatto presa, unisci i due bracci facendo corrispondere i fori sul perno, e fissali con una delle tre viti. A questo punto il compasso è pronto!





6. Quando vorrai usarlo come quadrante non dovrai far altro che montare l'arco graduato con le altre due viti (con il disegno verso il recto dello strumento) e legare il filo a piombo alla vite superiore.





7. Per usarlo, naviga il sito

[http://brunelleschi.imss.fi.it/Esplora/compasso/indice.html]

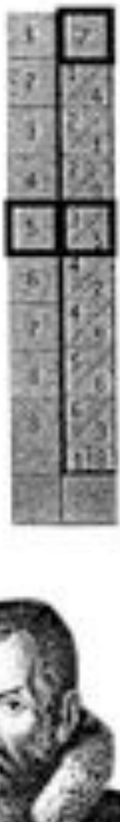
oppure scarica i testi completi dell'applicazione.

BUON DIVERTIMENTO!

i bastoncini di Nepero

un gioco per i ragazzi che fa bene anche agli ex-ragazzi

i bastoncini di Nepero



Come sono fatti

Se avete già costruito il vostro *kit*, potremo capirci meglio e giocare dal vivo con questo strumento-giocattolo che serve per fare moltiplicazioni e divisioni in un modo diverso dal consueto.

E' composto da una tavoletta, o *telaio*, e dai dieci *bastoncini* veri e propri che sono mobili e indipendenti uno dall'altro. Sul basso del telaio c'è la barra di appoggio e, sulla sinistra, una colonna fissa con le cifre da 1 a 9: su questa colonna fissa andremo a cercare, una alla volta, le cifre del moltiplicando (se faremo una moltiplicazione) oppure a leggere le cifre del quoziente (se faremo una divisione).

Ognuno dei dieci bastoncini, a sezione quadrata, ha quattro facce e ciascuna faccia è *intestata* con una delle cifre da 0 a 9. Sotto all'intestazione sono incolonnati dei numeri i quali non sono altro che la tabellina della cifra intestata. Infatti, se accostate un bastoncino alla colonna fissa, scoprite che ogni quadratino disegnato sulla faccia del bastoncino contiene il prodotto della cifra intestata per la cifra che, nella colonna fissa, sta all'altezza del quadratino stesso. Per esempio, come evidenziato nella figura,

$$7 \times 5 = 35$$

Notate anche che le cifre del prodotto scritto in un quadratino sono separate da una diagonale: decine a sinistra e unità a destra. Le cifre intestate sulle facce dei bastoncini servono per comporre il moltiplicatore (se faremo una moltiplicazione) oppure il divisore (se faremo una divisione).

Nepero; chi era costui?

Era un nobile scozzese, proprietario terriero: John Napier, ottavo barone di Merchiston. Dalle nostre parti è più conosciuto con il suo cognome latinizzato e poi italianizzato in Nepero.

Una vita abbastanza lunga per quei tempi (nato nel 1550 e morto 67 anni dopo) dedicata alla cura del suo feudo, alla famiglia (due mogli e dodici figli) e ai suoi sport preferiti: gli studi biblici e la matematica. L'abitudine di isolarsi a lungo per immergersi nei suoi studi misteriosi con un galletto nero come animale di compagnia, fece nascere la leggenda dei suoi poteri magici; egli sfruttò furbescamente questa leggenda per rafforzare autorità e controllo sui suoi sottoposti, ridendosi sotto i baffi della loro credulità.

Quanto agli studi sulle scritture sacre, in particolare sull'Apocalisse di S. Giovanni, egli li affrontò dal punto di vista di un protestante integralista, manifestando una opposizione durissima verso i "papisti" cattolici di Roma. Andò oltre le parole scritte e ideò diverse macchine da guerra contro eventuali attacchi delle flotte dei regni cattolici francesi e spagnoli.

Siccome non aveva alcun bisogno di trovarsi un lavoro per campare, il nostro barone coltivava la matematica non come una professione bensì come un *hobby*, come un piacevole passatempo: era un dilettante nel vero senso della parola. Altri famosi scienziati del suo tempo sono stati Keplero, Galileo Galilei e Cartesio i quali, assieme allo stesso Nepero e ad altri, hanno gettato le basi della scienza moderna.

Il progetto scientifico a cui si dedicò per tutta la vita era inteso a rendere più facili, veloci ed esatti i calcoli aritmetici che, specialmente in astronomia, richiedevano di maneggiare numeri con un gran numero di cifre. Il successo del progetto fu determinato dall'invenzione di quei numeri che Nepero chiamò prima "artificiali" e poi battezzò con il nome definitivo di "logaritmi". Grazie ad essi l'elevamento a potenza viene trasformato in una moltiplicazione e l'estrazione di radice in una divisione; moltiplicazione e divisione, a loro volta, vengono ridotte a somma e sottrazione; e finalmente, con il trucco del "complemento" che era già noto prima dei logaritmi, la sottrazione si trasforma in somma. In definitiva, tutte le sei operazioni fondamentali dell'aritmetica si possono risolvere facendo solo delle somme!

Nepero, inoltre, voleva offrire questi preziosi logaritmi belli e pronti, calcolati e stampati una volta per tutte nelle famose "tavole". Alla preparazione di queste tavole dedicò vent'anni di pazienti calcoli, tanto faticosi e soggetti ad errori che lui stesso, per facilitarsi il lavoro, inventò quei divertenti "bastoncini" dei quali andiamo a esplorare i segreti.

i bastoncini di Nepero
saperne tutto e di più

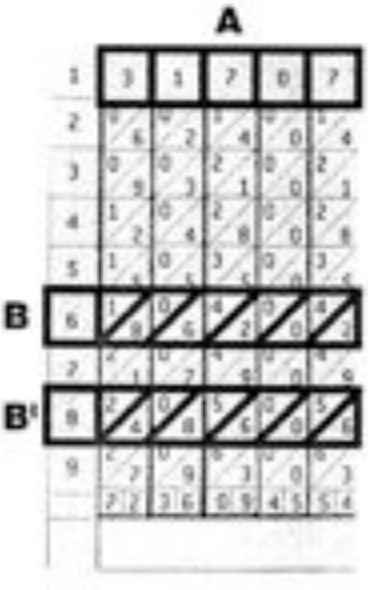


Figura 1

Facciamo insieme una moltiplicazione

Un esempio è più che sufficiente per diventare padroni delle regole del gioco (algoritmo).
Vi propongo allora la moltiplicazione **6 x 31707** e, per questo primo esperimento, lasciamoci guidare anche nei dettagli dalle indicazioni contenute nei passi da **A** a **C**.

A - Scegliamo cinque bastoncini con le facce intestate alle cifre del moltiplicatore (che sono **3**; **1**; **7**; **0**; **7**) e accostiamole, nell'ordine giusto, alla colonna fissa del telaio (Figura 1.A).

B - Guardiamo, sui bastoncini, la fila orizzontale dei quadratini che sta all'altezza del **6** (moltiplicando) sulla colonna fissa (Figura 1.B). In questa fila del **6**, sommiamo i due numeri che troviamo scritti fra ciascuna delle coppie di diagonali consecutive (tenendo presente che, alle estreme destra e sinistra, c'è un solo numero che non va sommato a niente). Otteniamo, nell'ordine, i sei numeri **1**; **8**; **10**; **2**; **4**; **2**.
Infatti **1**; 8 + 0 = **8**; 6 + 4 = **10**; 2 + 0 = **2**; 0 + 4 = **4**; **2**

C - Se ci sono numeri con due cifre (nel nostro esempio c'è il **10**), facciamo il riporto delle decine verso sinistra e otteniamo così i numeri **1**; **9**; **0**; **2**; **4**; **2** che sono proprio le cifre del nostro prodotto.
E' il gioco è fatto:
6 x 31707 = 190242.

Adesso, per andare sul difficile, vogliamo fare **86 x 31707**, ricordandoci intanto che
86 = 8 x 10 + 6.
Siccome il moltiplicatore è lo stesso di prima, il passo **A** (scelta e posizionamento dei bastoncini) l'abbiamo già fatto e il telaio rimane come lo abbiamo lasciato. Inoltre (me guarda che fortuna!), abbiamo già pronto il calcolo del prodotto parziale relativo alla cifra delle unità nel moltiplicando (**6 x 31707 = 190242**) e quindi andiamo avanti con i seguenti passi da **B'** a **E**.

B' - Analogamente al passo **B**, guardiamo la fila orizzontale all'altezza dell'**8** (Figura 1.B'). In questa fila dell'**8**, sommiamo i numeri compresi tra le coppie di diagonali consecutive. Siccome troviamo **2**; 4 + 0 = **4**; 8 + 5 = **13**; 6 + 0 = **6**; 0 + 5 = **5**; **6**, i numeri che otteniamo sono
2; 4; 13; 6; 5; 6.

C' - Analogamente al passo C, facciamo i riporti delle decine, dove ci sono, verso sinistra e otteniamo 8 x 31707 = 253656.

D - Siccome l'8, nel moltiplicando, è la cifra delle decine, il risultato ottenuto nel passo C' lo dobbiamo moltiplicare per 10 ovvero dobbiamo semplicemente aggiungervi uno zero a destra.
Otteniamo così il prodotto parziale relativo alla cifra delle decine nel moltiplicando:
80 x 31707 = 2536560.

E - Facciamo infine la somma dei prodotti parziali che abbiamo ricavato nei passi **C** e **D** e otteniamo:
190242 + 2536560 = 2726802
ovvero **68 x 31707 = 2726802**

Intermezzo

Vi sembra complicato? Certo che abbiamo pignoleggiato parecchio! Però sono sicuro che, già adesso, siete in grado di ripetere l'esempio calcolando a mente (e annotando) i prodotti parziali, senza tante spiegazioni; dopo di che, per risolvere una rispettabile moltiplicazione come 86 x 31707, tutto quello che dovete fare è la somma dei prodotti parziali.

E' garantito che, con una calcolatrice tascabile, avremmo fatto più in fretta e con meno fatica (fatica?). Però avremmo perso una buona occasione per giocare con i bastoncini e per curiosare su come funzionano i numeri. In definitiva, i bastoncini aiutano a lubrificare il nostro meraviglioso cervello che altrimenti, a colpi di tecnologia, rischia di arrugginirsi. Inventatevi qualche altra moltiplicazione e diventerete degli insuperabili campioni nel calcolare esattamente un prodotto composto anche da molte cifre, tante che nessuna calcolatrice ne sarebbe capace!

Vi sarete accorti che il calcolo finale, vale a dire la somma dei prodotti parziali, è identico a quello che dobbiamo fare quando usiamo le normali regole che, con più o meno fatica, abbiamo imparato per le moltiplicazioni fatte con carta e penna. E allora, dove sta il trucco? Il fatto è che Nepero ha scritto la tavola pitagorica sui suoi bastoncini una volta per tutte;

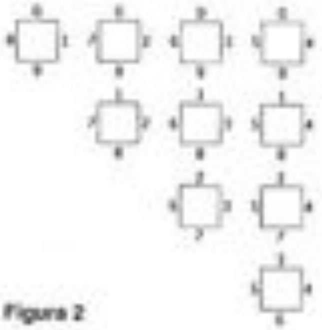


Figura 2

Figura 3

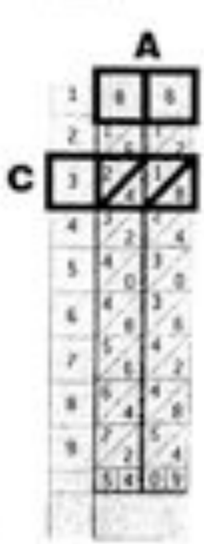


Figura 4

In tal modo non c'è bisogno di fare a mente nessuna moltiplicazione, nemmeno quelle semplicissime tra numeri di una sola cifra. In altre parole, la tavola pitagorica non c'è più bisogno di impararla a memoria! E quindi (Dio mi perdoni) devo riconoscere che anche il buon vecchio Nepero, con l'ingenua tecnologia del suo tempo, ha finito col lusingare la nostra pigrizia mentale. D'altra parte bisogna riconoscere che ci ha lusingato con una buona dose di ingegnosa eleganza; eleganza di cui andiamo a scoprire qualche notevole aspetto.

I 10 bastoncini, nel loro complesso, hanno 40 facce. Però, quando li guardiamo, vediamo chiaramente solo le 10 facce rivolte all'insù, verso di noi. Se le cifre dell'intestazione fossero messe a casaccio, avremmo quindi un bel girare e rigirare i bastoncini per trovare proprio quelli che ci servono per comporre il nostro operando sul telaio. Un paio di accorgimenti che probabilmente ci vengono in mente per ovviare a questa difficoltà sono quello di non intestare mai alla stessa cifra più di una faccia di un certo bastoncino e quello di dare la stessa importanza a tutte le intestazioni possibili (ovvero alle 10 cifre: 0; 1; 2; ..... 9), dedicando 4 facce a ciascuna di esse. Rispettando questi vincoli, il nostro Nepero ha escogitato questa elegante disposizione in cui i bastoncini sono visti in sezione (Figura 2).

Da notare che la somma delle cifre a cui è intestata una qualsiasi coppia di facce opposte è sempre 9. E di queste coppie di cifre complementari rispetto al 9 ne abbiamo 5 che sono 0;9 1;8 2;7 3;6 4;5. Ebbene: ciascuna di queste coppie, in quattro bastoncini diversi, è associata a tutte le altre quattro coppie. L'ergonomia di questa disposizione è completata dai due numeri (che sono impressi nel basso di ciascuna faccia e che non fanno parte della tabellina: essi indicano le cifre a cui sono intestate le due facce laterali, a destra e a sinistra di quella che è in vista. Sviluppando sul piano le quattro facce di un bastoncino, la cosa si presenta come nella Figura 3. Come risultato, qualsiasi sia la faccia in vista di un qualsiasi bastoncino, in un colpo d'occhio riconosciamo le cifre a cui sono intestate le tre facce nascoste: quella opposta e le due laterali.

Se avete voglia di curiosare, dalla elegante disposizione escogitata da Nepero potete trarre lo spunto per ragionare un po' sui cosiddetti numeri triangolari (ma cosa saranno mai?) e sulle combinazioni a due a due degli oggetti di un insieme: nel caso in esame, gli oggetti dell'insieme sono le 5 coppie di cifre complementari rispetto al 9 e ciascun bastoncino le combina a due a due.

I bastoncini presentano comunque alcune limitazioni: infatti l'operando impostato sul telaio non può avere più di 10 cifre (e sono comunque tante!); nello stesso operando, inoltre, nessuna cifra può presentarsi più di quattro volte. Però si tratta di limitazioni contingenti: rispetto al kit standard, basterebbe aumentare il numero dei bastoncini e la larghezza del telaio.

E adesso una divisione

Se siete arrivati fin qui, vale la pena di continuare il gioco e di affrontare anche la divisione. A dire il vero, Nepero aveva aggiunto un bastoncino speciale, a sezione rettangolare anziché quadrata, le cui due facce più larghe contenevano delle tabelline studiate apposta per calcolare radici quadrate e radici cubiche. Il calcolo risultava però alquanto macchinoso e l'uso di questo bastoncino aggiuntivo non ha avuto un grande successo. Per questo, non volendo abusare della vostra attenzione, ho deciso di risparmiarvi questa variante del gioco, magari ne parleremo in una prossima puntata. E potremo parlare anche di un altro congegno inventato da Nepero: una sorta di supercomputer specializzato nelle moltiplicazioni, con il quale si ottiene direttamente il prodotto senza bisogno di calcolare i prodotti parziali e la loro somma finale.

Come già per la moltiplicazione, scopriremo che anche il modo di procedere nella divisione ha diverse analogie con l'algoritmo a cui siamo abituati; però, armeggiando con i bastoncini, si va più in fretta e si eliminano molte delle possibilità di errore. Usando dei numeri che ci sono già familiari, cerchiamo allora di fare **2726802 : 86** e procediamo come segue.

A – Prendiamo i bastoncini con le facce intestate a **8** e **6** e componiamo il divisore sul telaio (Figura 4.A).

B – Nel dividendo **2726802**, partendo da sinistra, isoliamo le cifre che formano un numero maggiore o uguale al divisore **86**. Il **2** e poi il **27** non vanno bene mentre **272** ci soddisfa e sarà il nostro primo dividendo parziale.

C – Col solito trucco di sommare i numeri compresi tra ogni coppia di diagonali sulle facce dei bastoncini, cerchiamo la linea orizzontale in cui compare il più grande numero minore o uguale a **272**. Troviamo il numero **258** (**2**; **4 + 1 = 5**; **8**) che sta nella linea a cui corrisponde il **3** sulla colonna fissa (Figura 4.C). Il **3** che abbiamo così individuato è la prima cifra, quella più a sinistra, del quoziente che andiamo cercando.

D – Facciamo ora, a mente, la sottrazione **272 – 258 = 14**. Abbiamo così il primo resto parziale (**14**) alla cui destra "abbassiamo" il **6** che è la cifra del dividendo immediatamente a destra del **272** che abbiamo già utilizzato. Otteniamo così **146** che è il secondo dividendo parziale.

A questo punto, senza farla tanto lunga, ripetiamo i passi **C** e **D** usando **146** al posto di **272** e così di seguito, ottenendo successivamente:

dividendo parziale: 146
sui bastoncini: 86
cifra del quoziente: **1**
resto parziale: 146 – 86 = 60

dividendo parziale: 608
sui bastoncini: 602
cifra del quoziente: **7**
resto parziale: 608 – 602 = 6

dividendo parziale: 60
sui bastoncini: 0
cifra del quoziente: **0**
resto parziale: 60 – 0 = 60

dividendo parziale: 602
sui bastoncini: 602
cifra del quoziente: **7**
resto finale: 602 – 602 = 0

E con questo abbiamo concluso che **2726802 : 86 = 31707**.

Dobbiamo notare che la nostra divisione, come ci aspettavamo, ha generato un quoziente esatto ovvero con resto finale uguale a zero, il che è una circostanza piuttosto fortunata come vedremo nel prossimo paragrafo.

Ricordiamoci che ...

Tanto per essere sicuri che, nei paragrafi precedenti, ci siamo capiti senza equivoci su alcune delle parole e dei concetti che abbiamo usato, *ripassiamoci* insieme alcune cose facili facili.

• Nel nostro usuale *sistema di numerazione* (che si chiama *posizionale e decimale*), le cifre di un qualsiasi numero, prese da destra verso sinistra, rappresentano le unità, le decine, le centinaia, le migliaia e così avanti. Se in un numero compare la virgola, le cifre dopo di essa, da sinistra a destra, rappresentano decimi, centesimi, millesimi eccetera. Questo significa che, in simboli *numerici*, 1808,3 = 1 x 1000 + 8 x 100 + 0 x 10 + 8 x 1 + 3 x 1/10.

• Prendiamo una qualsiasi moltiplicazione; per esempio questa che già conosciamo: 31707 x 86 = 2726802. Il primo numero (31707) si chiama *moltiplicando*; il secondo numero (86) si chiama *moltiplicatore* e il terzo (2726802) si chiama risultato o *prodotto*. Moltiplicando e moltiplicatore si possono scambiare (commutare) tra di loro (proprietà commutativa). E' solo una questione di gusti, o di astuzia: se dovessi calcolare con carta e penna secondo il metodo tradizionale, io sceglierei 31707 x 86 anziché 86 x 31707. Il prodotto, beninteso, è sempre 2726802.

• Nella divisione 2726802 : 86 = 31707 il primo numero si chiama dividendo, il secondo *divisore* e il terzo risultato o *quoziente*. Dividendo e divisore *non* si possono scambiare tra di loro.

• La divisione 2726802 : 86 = 31707 è stata scelta a bella posta per avere un quoziente esatto; molto spesso, invece, capita che, assieme al quoziente, faccia la sua comparsa anche il *resto*. Per esempio 2726825 : 86 = 31707 *col resto di 23* il che significa: "quoziente (31707) x divisore (86) + resto (23) = dividendo (2726825)". Facendo un altro passo nella nostra divisione troveremmo che 2726825 : 86 = 31707,2 col resto di 5,8. La faccenda dei resti, ovvero della virgola nel quoziente e dei decimali che si possono calcolare dopo di essa, è *il grande segreto della divisione*. Vale la pena di pensarci sopra, magari discutendone con gli altri.

• La divisione si fa sempre tra numeri interi. Infatti, se dobbiamo dividere 10,5 per 3,41, prima di fare l'operazione vera e propria moltiplichiamo entrambi i numeri per 100; con il che il dividendo diventa 1050 e il divisore 341. Questo ci fa vedere la stretta relazione che esiste tra l'operazione di divisione e le frazioni: basta considerare il dividendo come l'analogo del *numeratore* e il divisore come l'analogo del denominatore: salta subito all'occhio il fatto che una frazione come 3 / 4 è del tutto equivalente al numero 0,75 che, a sua volta, è il quoziente della divisione 3 : 4.
In altre parole, la frazione 3 / 4 e il numero 0,75 sono due modi di rappresentare lo stesso oggetto matematico (oggetto che si chiama *numero razionale*) e la divisione non è altro che l'operazione con cui la sua rappresentazione in forma di frazione si trasforma in quella di numero decimale.
In conclusione, la regola per cui la divisione 10,5 : 3,41 diventa 1050 : 341 discende direttamente dalla proprietà delle frazioni che rimangono invariate quando numeratore e denominatore vengono moltiplicati (o divisi) per uno stesso numero. Il tutto si complica un pochino quando c'è di mezzo il resto: siamo di nuovo alle prese con il segreto della divisione.

bortiama@2003

istruzioni per il montaggio

Ritagliare gli elementi

Ritagliare ogni elemento seguendo la linea continua di taglio; il lavoro sarà più accurato se utilizzeremo un taglierino invece delle forbici, appoggiando le sagome su un cartone o altra superficie che protegga il piano di lavoro.
Fondamentale, in questa fase del lavoro, l'ausilio di un righello: quelli di metallo sono sicuramente più resistenti e indeformabili.
Attenzione: i taglierini sono pericolosi, meglio utilizzarli con la supervisione di un adulto (non vale per gli ex ragazzi).

Sagomare gli elementi ritagliati

Seguendo le linee tratteggiate, pieghiamo gli elementi con l'aiuto del righello.
L'operazione sarà molto più semplice, accurata e veloce se avremo avuto l'accortezza di incidere leggermente con il taglierino le linee di piega (con mano leggera, per non rischiare di recidere alcuni elementi della sagoma!).

Incollare gli elementi

Utilizziamo una colla liquida per carta o legno. Stendiamo la colla uniformemente in uno strato sottile sulle aree colorate in grigio, aiutandoci con una strisciolina di cartoncino ricavata dagli scarti del ritaglio delle sagome.

Per i bastoncini: incolliamo per prime le due linguette - superiore ed inferiore - aiutandoci, se serve, con il retro di una matita.
Ad incollaggio avvenuto, procediamo con la linguetta laterale.

Per il telaio : ribaltiamo la sagoma del telaio in modo da avere di fronte a noi la superficie non stampata; avvolgiamo i due elementi laterali su se stessi, sino a portare in vista la barra di numeri sulla sinistra e la barra inferiore. Incolliamo per prima la barra a sinistra, più lunga.

Nelle immagini a lato è rappresentato un bastoncino ritagliato e piegato, sovrapposto ad un bastoncino già incollato.

il telaio da ritagliare

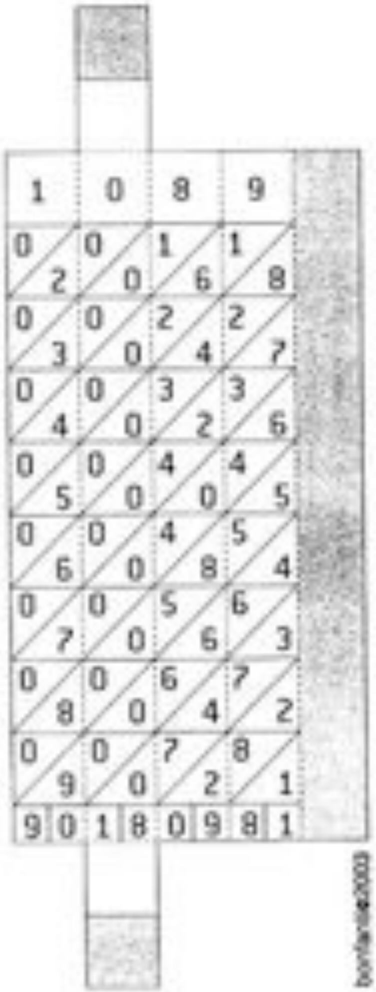
Legenda

Linea di taglio
Linea di piegatura
Area da incollare

i bastoncini da ritagliare

Legenda

Linea di taglio
Linea di piegatura
Area da incollare



bonfanti©2003

3	1	6	8
0/6	0/2	1/2	1/6
0/9	0/3	1/8	2/4
1/2	0/4	2/4	3/2
1/5	0/5	3/0	4/0
1/8	0/6	3/6	4/8
2/1	0/7	4/2	5/6
2/4	0/8	4/8	6/4
2/7	0/9	5/4	7/2
8 1	3 6	1 8	6 3

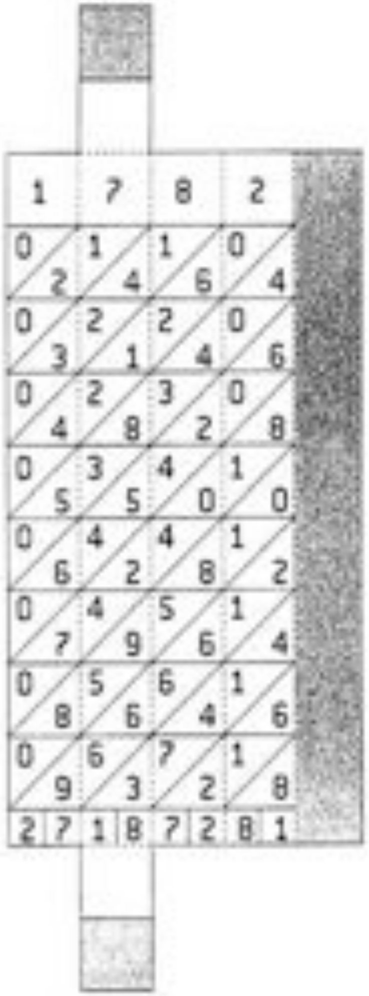
9	2	0	7
1/8	0/4	0/0	1/4
2/7	0/6	0/0	2/1
3/6	0/8	0/0	2/8
4/5	1/0	0/0	3/5
5/4	1/2	0/0	4/2
6/3	1/4	0/0	4/9
7/2	1/6	0/0	5/6
8/1	1/8	0/0	6/3
7 2	9 0	2 7	0 9

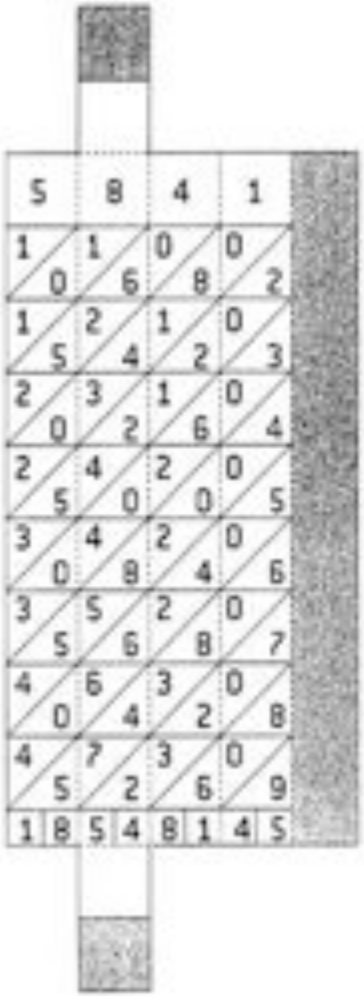
7	3	2	6
1/4	0/6	0/4	1/2
2/1	0/9	0/6	1/8
2/8	1/2	0/8	2/4
3/5	1/5	1/0	3/0
4/2	1/8	1/2	3/6
4/9	2/1	1/4	4/2
5/6	2/4	1/6	4/8
6/3	2/7	1/8	5/4
6 3	7 2	3 6	2 7

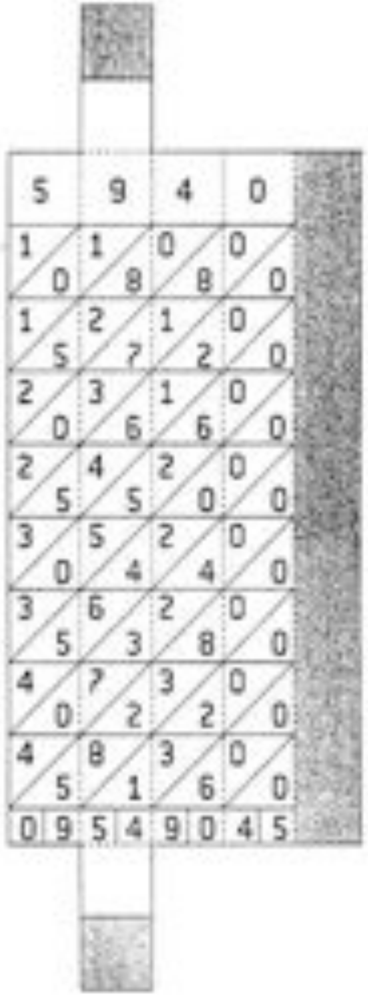
6	4	3	5
1/2	0/8	0/6	1/0
1/8	1/2	0/9	1/5
2/4	1/6	1/2	2/0
3/0	2/0	1/5	2/5
3/6	2/4	1/8	3/0
4/2	2/8	2/1	3/5
4/8	3/2	2/4	4/0
5/4	3/6	2/7	4/5
5 4	6 3	4 5	3 6

2	5	7	4
0/4	1/0	1/4	0/8
0/6	1/5	2/1	1/2
0/8	2/0	2/8	1/6
1/0	2/5	3/5	2/0
1/2	3/0	4/2	2/4
1/4	3/5	4/9	2/8
1/6	4/0	5/6	3/2
1/8	4/5	6/3	3/6
4 5	2 7	5 4	7 2

0	6	9	3
0/0	1/2	1/8	0/6
0/0	1/8	2/7	0/9
0/0	2/4	3/6	1/2
0/0	3/0	4/5	1/5
0/0	3/6	5/4	1/8
0/0	4/2	6/3	2/1
0/0	4/8	7/2	2/4
0/0	5/4	8/1	2/7
3 6	0 9	6 3	9 0


1 7 8 2
0 2 | 1 4 | 1 6 | 0 4
0 3 | 2 1 | 2 4 | 0 6
0 4 | 2 8 | 3 2 | 0 8
0 5 | 3 5 | 4 0 | 1 0
0 6 | 4 2 | 4 8 | 1 2
0 7 | 4 9 | 5 6 | 1 4
0 8 | 5 6 | 6 4 | 1 6
0 9 | 6 3 | 7 2 | 1 8
2 7 1 8 7 2 8 1


5 8 4 1
1 0 | 1 6 | 0 8 | 0 2
1 5 | 2 4 | 1 2 | 0 3
2 0 | 3 2 | 1 6 | 0 4
2 5 | 4 0 | 2 0 | 0 5
3 0 | 4 8 | 2 4 | 0 6
3 5 | 5 6 | 2 8 | 0 7
4 0 | 6 4 | 3 2 | 0 8
4 5 | 7 2 | 3 6 | 0 9
1 8 5 4 8 1 4 5


5 9 4 0
1 0 | 1 8 | 0 8 | 0 0
1 5 | 2 7 | 1 2 | 0 0
2 0 | 3 6 | 1 6 | 0 0
2 5 | 4 5 | 2 0 | 0 0
3 0 | 5 4 | 2 4 | 0 0
3 5 | 6 3 | 2 8 | 0 0
4 0 | 7 2 | 3 2 | 0 0
4 5 | 8 1 | 3 6 | 0 0
0 9 5 4 9 0 4 5

credits

corrado bonfanti ha immaginato tutto ciò
sabina bonfanti ha disegnato tutto ciò
tra i due esiste una parentela
corrado_bonfanti@hotmail.com