

Un programma affollato di eventi

Il parco di divertimento *Kangourandia* offre ai suoi visitatori un ricco calendario di eventi. Ogni giorno sono previsti film 4D, esibizioni degli *stunt-men* e dei tuffatori, commedie musicali, animazione dei bambini, parate delle *mascotte*, e altro ancora.

Avete solo un giorno a disposizione e volete assistere al massimo numero di eventi possibili. Naturalmente non è possibile assistere ad eventi che si svolgono in contemporanea (anche parzialmente).

Il vostro amico Ale Gridi, genio dell'informatica, vi ha suggerito di usare questa strategia per scegliere gli eventi cui assistere:

Mettete in ordine gli eventi del programma, poi analizzateli uno alla volta rispettando quell'ordine: se l'evento in questione è il primo considerato oppure non si sovrappone agli altri eventi già scelti, allora assisterete all'evento, altrimenti lo scarterete e non lo prenderete più in considerazione.

In questo modo, garantisce Ale Gridi, riuscirete ad assistere ad un numero di eventi che nessuno potrà battere.

L'unico problema è che non vi ricordate in che modo Ale Gridi vi ha suggerito di ordinare gli eventi e le possibilità sono molte!

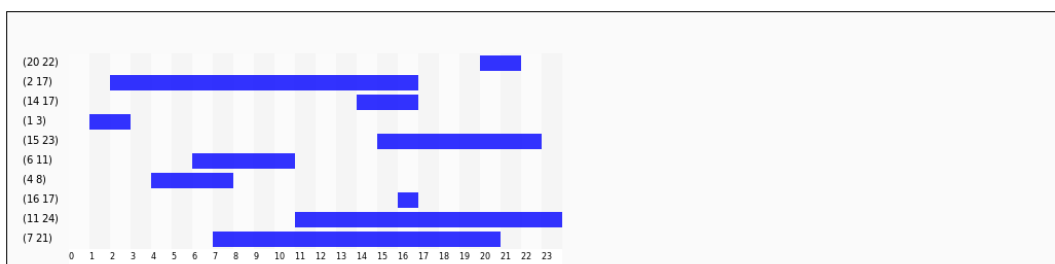
Per individuare un buon criterio di ordinamento, avete a disposizione un programma che vi aiuterà a fare degli esperimenti. Per avviarlo lanciate il programma *Eventi*, vi comparirà una pagina con tre riquadri.

- Nel riquadro in alto potete inserire e modificare le informazioni relative agli orari degli eventi; per semplicità assumiamo che gli eventi inizino e finiscano tutti allo scoccare dell'ora. Per ogni evento, va indicata la coppia di ora di inizio e ora di fine nel formato (inizio fine). Ad esempio la sequenza

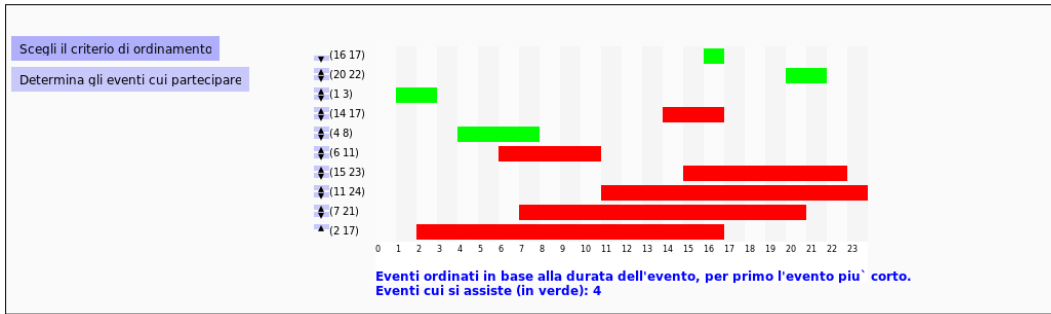
(20 22)(2 17)(14 17)(1 3)(15 23)(6 11)(4 8)(16 17)(11 24)(7 21)

rappresenta dieci eventi, uno che inizia alle 20 e finisce alle 22, uno che inizia alle 2 e finisce alle 17, uno che inizia alle 14 e finisce alle 17, e così via. Possono esserci più eventi con lo stesso orario, in questo caso ci sarà una coppia (inizio fine) che si ripete nella sequenza.

- Nel riquadro centrale trovate una rappresentazione grafica degli eventi in base al loro orario.

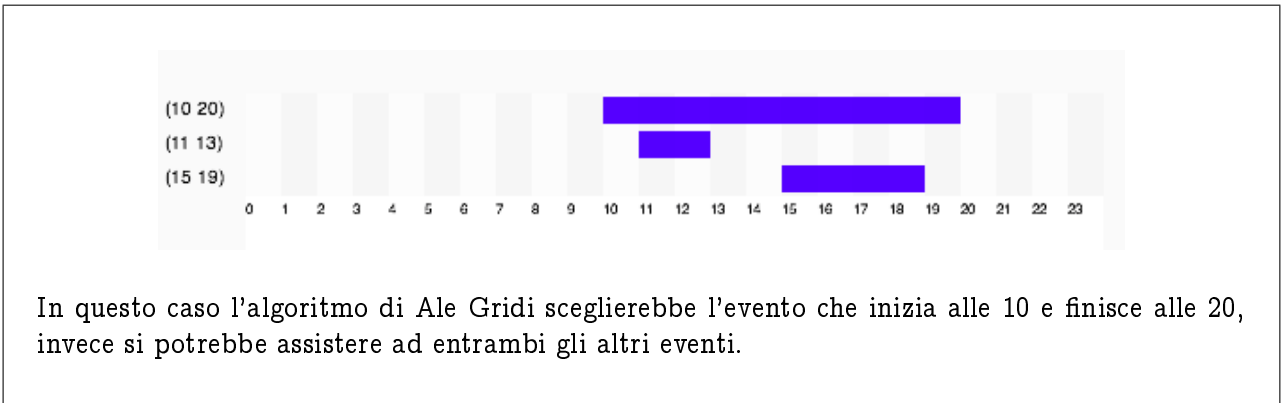


- Nel riquadro in basso potete modificare l'ordine in cui vengono visualizzati gli eventi elencati nella sequenza del primo riquadro. Con le frecce a sinistra potete spostare verso l'alto o il basso ciascun evento. Potete inoltre scegliere un criterio di ordinamento e ottenere la visualizzazione degli eventi nell'ordine corrispondente. Infine, cliccando su "determina gli eventi cui partecipare", potete applicare, agli eventi così ordinati, la strategia suggerita da Ale Gridi, ottenendo in verde l'elenco degli eventi cui assistere. Ad esempio, ordinando in base all'ora di inizio (per primo quello che inizia per primo) si otterrebbe questa selezione di eventi:



Per ciascuno dei seguenti criteri di ordinamento, scrivete se è un criterio *adatto* oppure no, nel senso che permette di selezionare il maggior numero di eventi possibili cui assistere. Inoltre, per ciascuno dei criteri che considerate non adatti, fornite un esempio (più semplice è l'esempio, maggiore sarà il punteggio) che mostra perché il criterio non è adatto. Per ciascuno dei criteri che considerate adatti, illustrate, nell'ultimo riquadro di questo quesito, il ragionamento che vi ha portato a questa conclusione.

1. Criterio: in base all'ora d'inizio, per primo quello che inizia prima.



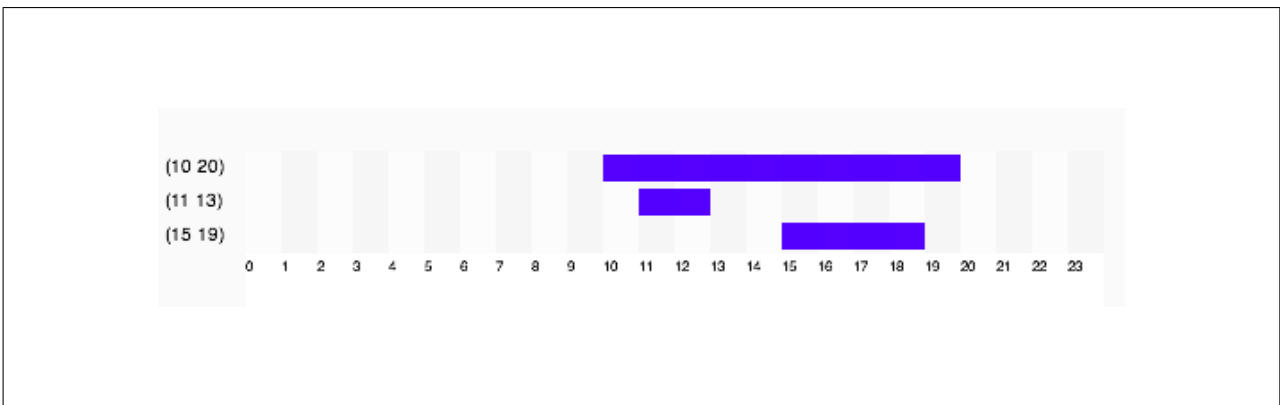
2. Criterio: in base all'ora di fine, per primo quello che finisce prima.

Questo è un criterio adatto!

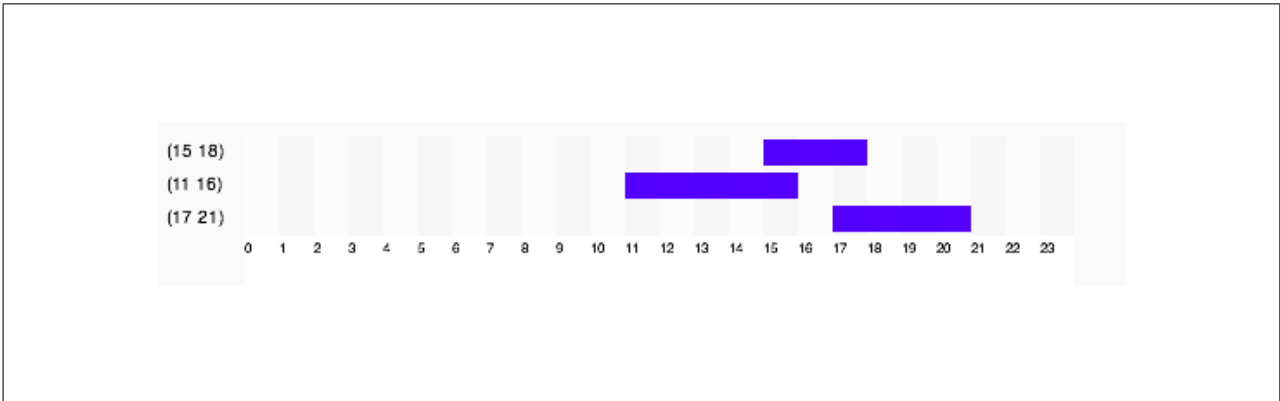
3. Criterio: in base all'ora d'inizio, per primo quello che inizia più tardi.

Questo è un criterio adatto!

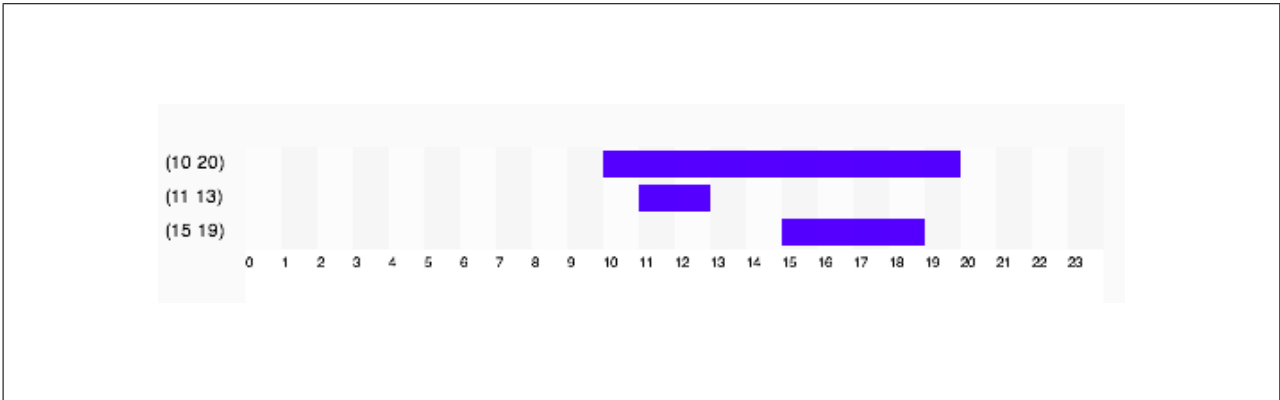
4. Criterio: in base all'ora di fine, per primo quello che finisce più tardi.



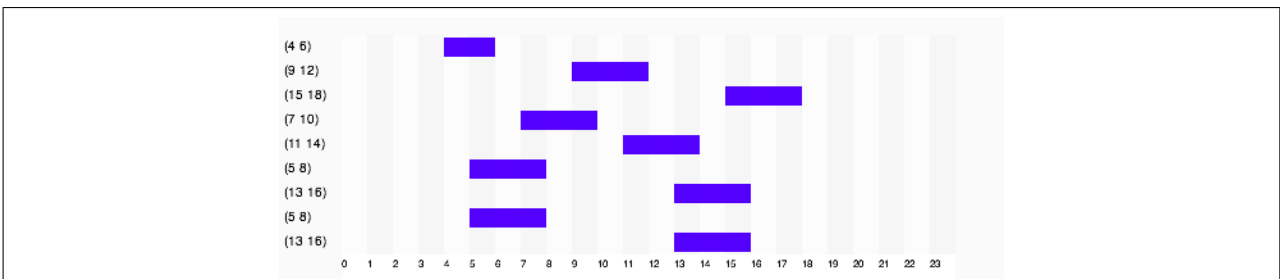
5. Criterio: in base alla durata dell'evento, per primo l'evento più corto.



6. Criterio: in base alla durata dell'evento, per primo l'evento più lungo.

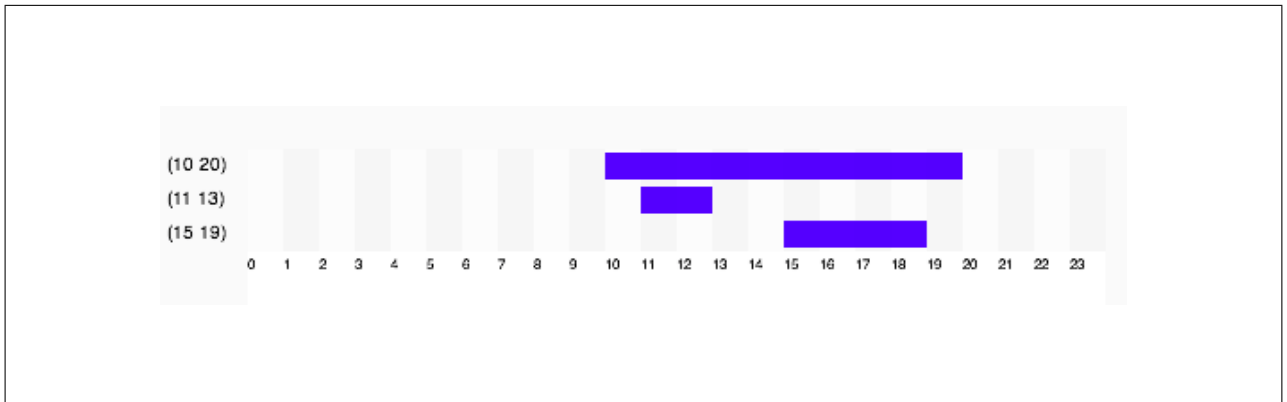


7. Criterio: in base al numero di sovrapposizioni, per primo l'evento che ha meno sovrapposizioni con gli altri eventi.



In questo caso la strategia di Ale Gridi sceglierebbe gli eventi con orari (4,6), (9,12) e (15,18). Tuttavia, invece di assistere all'evento (9,12), si potrebbe assistere agli eventi (7,10) e (11,14), per un totale di 4 eventi al posto di 3.

8. Criterio: in base al numero di sovrapposizioni, per primo l'evento che ha più sovrapposizioni con gli altri eventi.



Illustrate in modo convincente che i criteri (o il criterio) che avete considerato adatti sono imbattibili.

Ordinare gli eventi in base all'orario di fine, per primo quello che finisce prima, fornisce un criterio adatto, nel senso che garantisce sempre di assistere al massimo numero di eventi possibile. Per dimostrarlo, fissiamo un qualsiasi insieme di eventi. Immaginiamo che sia n il numero massimo di eventi cui si può assistere; che $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ sia una qualunque soluzione (ovvero un insieme di eventi che non si sovrappongono) con n eventi; e che $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ sia l'elenco degli eventi scelti invece usando la strategia di Ale Gridi in base all'ora di fine (per primo quello che finisce prima). Osservate che $m \leq n$ visto che si può assistere al più a n eventi. Per comodità, sia in \mathcal{E} che in \mathcal{G} mettiamo gli eventi in ordine in base all'orario di fine, ovvero E_1 finisce prima di E_2 , E_2 finisce prima di E_3 , e così via, e lo stesso per G_1, G_2, \dots . Allora naturalmente si ha che G_1 finisce prima (o assieme a) E_1 ; infatti se così non fosse, la strategia di Ale Gridi avrebbe portato a scegliere E_1 invece di G_1 . Di conseguenza, E_2 inizia dopo che G_1 è finito. Quindi anche G_2 deve finire prima (o assieme a) E_2 , altrimenti la strategia di Ale Gridi avrebbe portato a scegliere E_2 invece di G_2 . E così via, fino ad arrivare a G_m che deve finire prima (o assieme a) E_m . Se m fosse più piccolo di n , allora la strategia di Ale Gridi porterebbe ad aggiungere a \mathcal{G} anche $E_{m+1}, E_{m+2} \dots E_n$, e siccome questo non è il caso, allora possiamo concludere che m è proprio uguale a n , ovvero anche \mathcal{G} contiene il numero massimo di eventi cui si può assistere.

Simmetricamente, anche ordinare gli eventi in base all'orario di inizio, per primo quello che inizia dopo, fornisce un criterio adatto; per dimostrarlo si può ragionare come per il criterio precedente, ma partendo dalla fine invece che dall'inizio.