Piano Lauree Scientifiche Matematica e Statistica, Università di Udine 2010-2014

Laboratori

Per gLi Studenti

A cura di:

Rossana Vermiglio

PIANO NAZIONALE LAUREE SCIENTIFICHE

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università di Udine

Via delle Scienze 206

33100 Udine

Italia

Prima edizione digitale: Ottobre 2015

ISBN: 9788890619304

9 788890 619304

Laboratori *P*er g*L*i *S*tudenti

A cura di:
Rossana Vermiglio

PREFAZIONE

Questo libro presenta alcuni dei laboratori realizzati dal 2010 al 2014 nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche (PLS) per la Matematica e Statistica (MS) finanziato dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR). Il PLS nasce dalla collaborazione del MIUR con la Conferenza Nazionale dei Presidi di Scienze e Tecnologie e Confinindustria e pone l'attenzione non solo alla Matematica e Statistica, ma anche alla Chimica, Fisica e Scienza dei Materiali. Le finalità di orientamento degli studenti e di formazione insegnanti si realizzano attraverso laboratori, dove gli studenti possono confrontarsi su temi, problemi e metodologie delle discipline scientifiche, nel nostro caso della matematica, anche in relazione al mondo del lavoro, e dove gli insegnanti possono perfezionare le conoscenze disciplinari e interdisciplinari e rivedere i contenuti e metodi dell'insegnamento e apprendimento.

A conclusione del progetto si è ritenuto importante raccogliere in un libro alcuni dei percorsi realizzati, per diffondere tali esperienze e permettere così anche agli insegnanti non coinvolti attivamente nel PLS di trovare spunti e idee da utilizzare nei loro percorsi curriculari. Si è scelto di concentrare l'attenzione ai laboratori PLS di base che, secondo la definizione del MIUR, avvicinano alle discipline scientifiche, sviluppano le vocazioni, e che rappresentano un'attività consistente e non episodica. Il materiale raccolto nel libro non presenta tutto il lavoro svolto e si limita a tracciare le idee portanti. Per una panoramica più ampia del progetto e per eventuali approfondimenti su temi specifici si rimanda al sito

https://www.dimi.uniud.it/scuole/pls/

dove si trovano le slides delle presentazioni e dei seminari, le dispense e i codici.

ll PLS-MS dell'Università di Udine era inizialmente un'attività della Facoltà di Scienze MM.FF.NN. Dopo la riorganizzazione dell'ateneo, si è appoggiato al Dipartimento di Matematica e Informatica (DIMI). Per valorizzare l'esperienza acquisita in precedenti progetti e per dare continuità ai rapporti già consolidati con alcune scuole, è partito con una riflessione sullo sviluppo di alcuni temi già trattati. Ma ben presto l'offerta si è arricchita di nuove proposte non solo per rispondere alle richieste degli insegnanti, ma anche per cercare di trasferire al mondo della scuola alcune esperienze legate ai più recenti temi di ricerca sviluppati in dipartimento con le relative metodologie.

Si è così deciso di indagare più ampiamente sul ruolo della matematica nella risoluzione di problemi e nella descrizione di fenomeni, che nascono in diversi ambiti applicativi. I temi trattati sono stati suggeriti anche dalla ricerca sviluppata presso il DIMI. Le peculiarità del PLS-MS sono la forte attenzione agli aspetti interdisciplinari, in particolare ai legami con l'informatica e la fisica, e la presenza, ove possibile, di laboratori di matematica computazionale, che prevedono l'uso del computer e di software matematico (MATLAB, GeoGebra, R, C, Php). Gli studenti hanno così potuto operare attivamente e gli insegnanti hanno apprezzato l'utilizzo del calcolatore e del software matematico come ulteriori supporti alla didattica. La formazione standard dell'insegnante spesso non include tali esperienze, che quindi hanno dato loro un'opportunità di crescita professionale. Inoltre la presenza di laboratori di matematica computazionale ha permesso di evidenziare l'importanza degli algoritmi e delle simulazioni numeriche, quali fondamentali metodologie della ricerca per lo studio di problemi sia teorici che applicativi. Tali attività sono state realizzate principalmente presso i laboratori dell'Ateneo e questa scelta ha avuto anche un'importante ricaduta sull'orientamento in entrata degli studenti delle scuole superiori.

L' organizzazione delle attività, pur adattandosi alle varie esigenze, ha seguito un comune schema di lavoro:

- progettazione con gli insegnanti (inquadramento degli argomenti, verifica dei requisiti e delle terminologia, approfondimenti teorici) sia attraverso incontri che con scambio di materiale via e-mail;

- presentazione agli studenti dell'attività con approfondimento dei concetti/strumenti matematici e inquadramento storico degli argomenti tramite seminari;

- attività di laboratorio degli studenti coadiuvati da docenti ed insegnanti;

- eventuale ripresa e/o approfondimento nelle singole classi dei concetti/strumenti appresi;

- valutazione degli studenti.

Nei laboratori sono stati coinvolti esperti per i seminari formativi e alcuni studenti della laurea in specialistica in matematica. Le attività per le scuole superiori hanno cercato un equilibrio tra parti curriculari ed extracurriculari, mentre per le altre scuole si è privilegiato la parte curriculare.

Di seguito un breve sommario del contenuto del libro. Le tre sezioni *Realtà e Modelli*, *La matematica per la sintesi del suono*, *La matematica in rete* del laboratorio *La matematica c'é* hanno evidenziato il ruolo della matematica nella modellizzazione del mondo reale e nella risoluzione di problemi presenti nella quotidianità. Nel *Laboratorio di indagini statistiche* è stata condotta un'indagine statistica sul tema *"Quali prospettive dopo la maturità: continuo a studiare o cerco lavoro?"*. Sono incluse anche attività di laboratorio su alcuni temi classici della matematica: l'*Infinito in Matematica*, che ha coinvolto anche esperti delle discipline filosofiche, *Le geometrie non euclidee* e le *Rivoluzioni matematiche* che hanno evidenziato i legami tra matematica e fisica coinvolgendo studenti ed insegnanti con attività computazionali. I legami con l'informatica sono stati approfonditi in *Codici Segreti:un viaggio nella crittografia* e nel *Laboratorio di basi di Dati*.

Come già sottolineato in precedenza il libro non descrive tutto il lavoro svolto. Si ricorda anche *Dalla bisezione ai frattali di Newton* sul problema del calcolo delle radici di un'equazione con alcuni semplici algoritmi risolutivi, *Grafi: concetti, problemi ed applicazioni* sui concetti di base della teoria dei grafi, sulle sue applicazioni alla modellizzazione e risoluzione algoritmica di problemi reali. In *Dalla soluzione di problemi alla creazione di teorie: esempi dalla teoria dei numeri e dalla topologia* si parte da problemi concreti per arrivare gradualmente alla formulazione di una teoria. Alcune semplici analisi demografiche effettuate su un campione di militari caduti estratto dall'Albo d'oro è il tema di *Aspetti demografici dei caduti italiani nella Prima guerra mondiale*. In *Intelligenza Artificiale: codifica e risoluzione di rompicapi* si è tentato di introdurre in modo divertente l'arte della progettazione di algoritmi per risolvere rompicapi. *Il Gioco delle Perle di Vetro* propone una riflessione sulle relazioni tra matematica ed informatica, valorizzando, attraverso un percorso completo dalle scuole primarie alle scuole secondarie superiori, i contributi culturali ed il peculiare punto di vista sulla realtà della disciplina più giovane. Il corso di formazione su *Programmazione lineare e programmazione lineare intera* nasce da una specifica richiesta degli insegnanti, la cui formazione spesso non copre tali argomenti. I laboratori PLS avanzati di *allenamento* per la preparazione alle gare di matematica e le olimpiadi di informatica (con ottimi risultati degli studenti partecipanti) sono stati realizzati congiuntamente alla Mathesis e con il contributo degli studenti universitari. Questi ultimi hanno collaborato con le insegnanti di una scuola media nell'organizzazione delle attività matematiche in occasione della *Festa del PiGreco*, realizzando nella stessa scuola anche il *Laboratorio di Origami*. Il breve stage presso l'*Istituto di Genomica Applicata* ha permesso agli studenti delle scuole superiori di conoscere un centro di ricerca avanzata, dove l'approccio algoritmico è essenziale per la risoluzione dei complessi problemi trattati. L'attività, che ben si inserisce nello scambio scuola-università-territorio, è servita agli studenti come orientamento. Un positivo riscontro ha ottenuto la *Matematica al Cinema*.

Il PLS ha fornito un'occasione importante per consolidare ed ampliare i rapporti tra scuole del territorio e l'Università di Udine. Gli incontri di progettazione dei laboratori, i diversi punti di vista emersi nella loro realizzazione, il lavoro svolto accanto agli studenti nei laboratori di matematica computazionale sono stati fruttuosi per tutti.

Per questo è importante concludere con un ringraziamento a tutti gli insegnanti che hanno lavorato alla realizzazione del progetto e ai dirigenti delle scuole che li hanno sostenuti. Sono stati numerosi e non me ne vogliano se non li cito tutti. Un sentito grazie agli studenti delle scuole che si sono messi in gioco, impegnandosi anche in orario extra-curriculare. Non dimentico la Mathesis sezione di Udine, per la sua preziosa opera di divulgazione delle iniziative PLS e per il il costante impegno nell'organizzazione di allenamenti e gare. Ma voglio rivolgere le parole di gratitudine conclusive ai colleghi che hanno condiviso con me il percorso (o almeno una sua parte) del PLS-MS

Breda Dimitri, Pietro Corvaja, Giovanna D'Agostino, Agostino Dovier, Federico Fontana, Alessio Fornasin, Massimo Franceschet, Gianluca Gorni, Salvatore La Vecchia, Brunello Lotti, Alberto Marcone, Claudio Mirolo, Alberto Policriti, Franca Rinaldi, Romeo Rizzi, Sebastiano Sonego, Elio Toppano, Paolo Vidoni, Nicola Vitacolonna, Gian Pietro Zaccomer, Fabio Zanolin,

per il loro generoso sostegno e per il prezioso tempo dedicato al progetto, tempo che, pur non risultando contabilizzato in nessun registro ufficiale, ha contribuito a diffondere le idee della matematica tra gli insegnanti e studenti, ed agli studenti della Laurea Specialistica in Matematica

Beatrice Anzil, Anna Barbieri, Matteo Boscariol, Martino Buchini, Valentina Busoni, Giulio Camilla Polacco, Giovanni Campagna, Elena Canel, Albero Carminati, Luca Cesarano, Alessandro De Cicco, Sara Della Schiava, Giulia De Zordo, Alessandro Doimo, Elisa Ellero, Michela Filaoro, Anna Chiara Gallo, Giulio Ghirardo, Luca La Manna, Corrado Lanera, Ariel Aldo Giovanni Lanza, Luca Marconato,Fabrizio Masullo, Antonia Mos, Silvia Marchesin, Manuela Mazzariol, Federico Quagliaro, Alberto Ragagnin, Luca Romanelli, Alice Spangaro, Giovanni Soldà, Leonardo Taglialegne, Stefano Tamburlini, Stefano Tognazzi,

per il loro giovane e contagioso entusiasmo. Infine un augurio di buon lavoro al nuovo coordinatore prof. Agostino Dovier.

Rossana Vermiglio

"ARCHEOLOGIA DELL'INFORMAZIONE": NELLA SCUOLA ELEMENTARE

DIANA BITTO, CLAUDIO MIROLO

6.1 Introduzione

La sperimentazione presentata in questo articolo nasce da una serie di esperienze precedenti che hanno coinvolto vari ambiti e vari livelli scolastici, allo scopo di integrare il programma di storia con lezioni sulle conoscenze matematico-scientifiche riguardanti le civiltà antiche. Per raggiungere questo obiettivo si sono utilizzate riproduzioni di antichi oggetti relativi all'ambito logico-matematico attraverso i quali gli studenti hanno avuto l'opportunità di riflettere sul faticoso percorso intrapreso dall'Uomo per raggiungere l'attuale livello culturale.

Ne è nata una serie di unità didattiche che sono state modulate a seconda del livello scolastico e del tempo che vi si intende dedicare. Fra queste, le attività rivolte alla scuola primaria sono state particolarmente apprezzate per la loro efficacia formativa in virtù del parallelismo fra il percorso effettuato dall'Uomo per sviluppare il pensiero logico-matematico e quello del bambino nei primi anni di vita. Si è infatti osservato che illustrare tale percorso ai piccoli allievi permette di aiutarli a rintracciare nel proprio vissuto gli elementi costitutivi del proprio modo di ragionare e dei propri personalissimi "algoritmi" di calcolo elementare, e contribuisce così a consolidare le loro basi di aritmetica.

Inoltre la presentazione in classe di copie di reperti archeologici per la codifica di dati numerici e di modelli di antichi strumenti di calcolo si è rivelata un efficace stimolo alla riflessione sui concetti fondamentali della matematica elementare e un mezzo per migliorarne l'assimilazione [7, 54]. Si è quindi puntato molto, nella fase del laboratorio, sulla riproduzione di tali oggetti che offre l'occasione per attività manipolatorie e organizzative, particolarmente importanti per la scoperta e l'apprendimento.

Il "pensiero matematico" è prevalentemente supportato da una rete di collegamenti fra le aree corticali preposte alla rappresentazione delle quantità, all'identificazione visiva, al trattamento dei linguaggi, alla ideazione di strategie e piani, e così via [41]. In particolare da studi relativamente recenti è emerso che, anche solo per effettuare un semplice calcolo numerico, utilizziamo tre diversi sistemi di manipolazione numerica: il sistema verbale, quello visivo e quello analogico.

Il primo di questi ha sede nell'emisfero sinistro, viene attivato dalle parole-numero (ad esempio "sette") ed utilizzato per operazioni semplici o per le tabelline già memorizzate attraverso l'esercizio orale. Il sistema visivo si attiva in presenza di segni grafici come appunto le cifre indo-arabe ("7"). Ad esso si ricorre quando le operazioni coinvolgono numeri troppo alti per il sistema verbale (es. cinquantatre per diciassette) ed il cervello richiede la visualizzazione delle cifre per iniziare l'algoritmo di calcolo. Il sistema analogico, invece, percepisce il numero in modo approssimativo e quindi è solamente in grado di rilevare se due numeri sono abbastanza vicini o distanti. Lavora in parallelo con gli altri due sistemi e non controlla se i risultati sono esatti ma solo se sono plausibili.

Per un buono sviluppo del pensiero logico-matematico è dunque importante che si creino fra le varie aree corticali stabili legami neurali. La costruzione di questa complessa rete inizia nei primi mesi di vita e prosegue nel tempo, permettendo al bambino di acquisire in forma molto personale i concetti di corrispondenza biunivoca, quantità, numero, operazione. Tutto ciò avviene soprattutto attraverso la vita di relazione, l'esplorazione dello spazio, la manipolazione degli oggetti e la comprensione del loro funzionamento.

È in base a queste osservazioni che si è deciso di inserire nel progetto le classi del primo ciclo della scuola primaria, possibilmente iniziando dalla classe prima.

6.2 Inquadramento storico

Studi fatti su animali, su popolazioni che hanno ancora uno stile di vita assimilabile a quello paleolitico e su neonati, hanno evidenziato che essi fra i sistemi accennati precedentemente usano il sistema analogico in una forma che chiameremo "sensazione numerica" o "senso del numero" [108]. Essa è semplicemente la capacità di distinguere, fra collezioni di oggetti, quale sia la più numerosa. A questo stadio dello sviluppo cognitivo l'insieme considerato non viene visto come un aggregato di elementi distinti ma come un tutt'uno in cui il concetto di quantità dipende spesso dalla forma dell'insieme e dal volume complessivo. È una fase arcaica, probabilmente legata a priorità di sopravvivenza, nella quale la dimensione delle prede o dei predatori è predominante sul numero. Ancor oggi nel valutare la numerosità di un insieme, risentiamo di questa sensazione numerica ma abbiamo imparato a superarla confrontando gli insiemi attraverso una corrispondenza biunivoca o contandone gli elementi.

Inizia in questo periodo anche un primo uso del sistema verbale, che non utilizza ancora parole apposite ma modifica il sostantivo in funzione della quantità. Per questo alcune popolazioni primitive hanno inventato parole diverse per dire un pesce, due pesci... un po' come se dicessimo perla, braccialetto, collana, per riferirci al numero di perle che li compongono.

In un momento successivo vengono introdotte le prime parole-numero per denotare la cardinalità di insiemi contenenti uno o due elementi mentre rimangono indifferenziati gli insiemi più numerosi (si parla di "molti") [65]. È la numerazione tipica dei cacciatori raccoglitori che non hanno necessità di stoccaggio né possiedono arnesi se non in quantità limitata (appunto uno o due). Ne sono un esempio gli indigeni del Mato Grosso che usano solo tre forme verbali: *amero* per dire uno, *alene* per dire due e poi dal tre in avanti *balene*, cioè "tanti" [70]. Si possono trovare tracce "fossili" di questo esiguo conteggio anche nei nostri linguaggi attuali. In francese per esempio il termine *très* serve a comporre il superlativo (*très bien*, *très bon*, ...) e, all'interno delle lingue indoeuropee, il prefisso *tr*–, o uno simile, indica spesso qualcosa di grande o numeroso. Altre popolazioni utilizzeranno combinazioni di termini analoghi ma sempre per quantità molto limitate (2+1; 2+2, 2+2+1..) e poi "molti".

Queste osservazioni rivelano aspetti profondi della nostre strutture cognitive ampiamente sperimentati. È provato per esempio che noi non cogliamo istantaneamente, senza contare, la numerosità di un insieme con più quattro elementi [6]. Possiamo indovinare la cardinalità cinque o sei se la posizione degli oggetti ricorda una struttura nota come quella delle facce di un dado. In caso contrario il cervello deve scomporre preliminarmente l'insieme in tanti piccoli gruppi da addizionare.

Nel seguito vedremo come tutto ciò abbia influenzato in vario modo la nascita della scrittura numerica e la scelta degli strumenti di calcolo.

I modelli

Con la formazione di gruppi sociali più numerosi nascono esigenze di maggiore controllo sui beni posseduti o sul numero di componenti del clan. Ne deriva l'utilizzo di piccoli oggetti da porre in corrispondenza biunivoca con gli elementi dell'insieme considerato. Dal punto di vista quantitativo essi rappresentano un *modello*. Il primo modello fu probabilmente il corpo le cui componenti, non solo le dita ma anche gomiti, spalle ecc.., furono messe ordinatamente in corrispondenza con gli elementi da contare. Contemporaneamente si utilizzarono, come già detto, piccoli oggetti come ciottoli, bastoncini, conchiglie oppure elementi singoli come taglie o cordini variamente annodati.

Va notato comunque che simili modelli di cardinalità non presumono necessariamente un concetto astratto di numero [6]. Nei millenni seguenti, nelle regioni in cui sorsero consistenti insediamenti stanziali con problemi di scorte e di scambi commerciali si rese necessario sviluppare modelli più articolati. Ecco quindi ognuno dei sitemi in uso evolversi per rappresentare un intervallo più ampio di numeri e consentire un primo approccio al calcolo. Si sono trovate tracce di questa evoluzione un po' in tutto il mondo e sono interessanti gli sviluppi che ogni sistema ha avuto. Nel seguito sono citati gli esempi più significativi e documentati.

Le parole numero

Ci si può chiedere perché raccogliere pietruzze o incidere tacche su un bastone... quando si potrebbe esprimere la quantità con una parola. Il motivo è che inventare una nuova parola con una semantica condivisa richiedeva anni di interscambi.

Figura 6.1: Semplici modelli per rappresentare cardinalità.

Esaminando le parole numero di alcune popolazioni ancora a livello primitivo si è potuto rilevare che esse derivano quasi sempre dall'utilizzo del corpo come modello. Questo uso ha generato sistemi di numerazione con basi diverse a seconda delle parti del corpo coinvolte. In tempi storici le basi più usate furono la base 20 (per esempio presso i Maia, gli Aztechi, i Celti, gli Esquimesi) e la base 10 che usiamo attualmente.

Si suppone inoltre che sia emersa, nel giro di qualche millennio, una differenziazione tra la parola che indicava un determinato dito e quella che rappresentava la quantità corrispondente: mentre la parola relativa all'arto subiva nel tempo una variazione linguistica, quella originaria rimaneva praticamente invariata nell'indicare un numero fino a diventare la parola astratta che usiamo tuttora. Ciò giustificherebbe le notevoli assonanze, specialmente fra le prime dieci cifre, in tutte le lingue indoeuropee [29].

Le mani

Il nostro modo di enumerare utilizzando le dita si limita alla prima decina, ma varie popolazioni hanno inventato altre tecniche per arrivare a numeri più grandi utilizzando chi le nocche, chi le falangi ed anche queste in modi alquanto diversi; particolari segni con le dita si notano tuttora nelle contrattazioni al mercato o in borsa e, forse dall'uso delle falangi, è nata in Mesopotamia la numerazione in base 60.

Il modo di flettere le dita che ha continuato ad essere usato per secoli è l'*indigitatio*: un tipo di rappresentazione numerica nata probabilmente in Egitto e da qui diffusa in ambito greco-romano [65].

Figura 6.2: Allegoria dell'Aritmetica in un bassorilievo della Fontana Maggiore di Perugia.

Essa è stata ampiamente utilizzata fino al tardo '700 e viene ancora usata, ad esempio, dalla popolazione Masai. È un modo di comunicare quantità, che non avviene più esibendo un modello e cioè tante dita quanti sono gli oggetti ma ogni numero viene rappresentato attraverso una combinazione diversa delle dita stesse che saranno più o meno flesse, estese o sovrapposte. Superata la corrispondenza biunivoca, viene quindi attivato il sistema visivo che riconosce il numero nella particolare configurazione della mano o nella combinazione delle due mani.

Una seconda modalità, che consente di effettuare non solo somme o sottrazioni ma anche moltiplicazioni, consiste nel calcolo manuale, particolarmente utile fino all'avvento di supporti per la scrittura a basso costo [65, 115]. Questa tecnica digitale fu assorbita dai romani che la introdussero nei loro curricoli scolastici come una delle materie fondamentali. Dopo la morte di Boezio, l'ultimo e forse unico matematico romano, la pratica andò scomparendo, ma nel 725 d.C. un monaco irlandese conosciuto come il Venerabile Beda ne promosse la diffusione attraverso il suo libro "De Temporum Ratione". Da allora l'indigitatio ha trovato numerosi ed importanti sostenitori e, nelle allegorie medioevali, l'Aritmetica è spesso rappresentata da una donna che atteggia le mani in una posizione del calcolo digitale.

Tutto ciò richiede comunque un notevole esercizio ed una certa cultura matematica. Popolazioni ad un livello culturale più elementare si sono accontentate di manipolare altri modelli per esempio tacche su ossa o su legno.

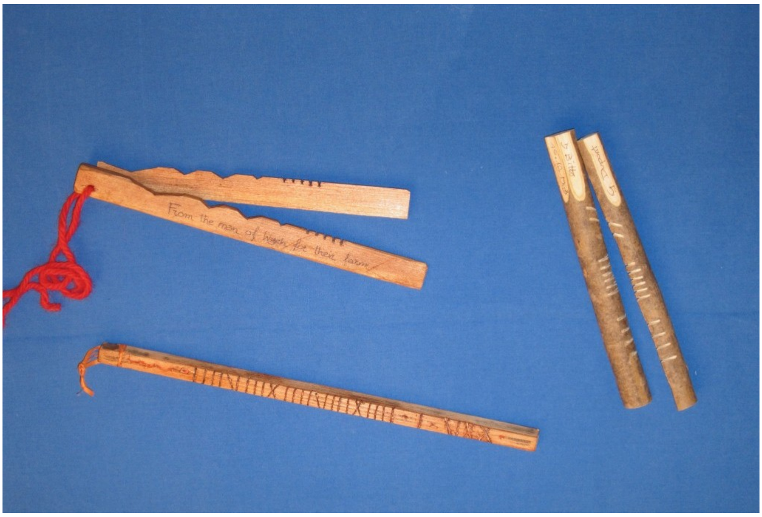

Figura 6.3: Ricostruzioni di taglie.

Le taglie

Si chiama taglia un qualsiasi oggetto sul quale vengono incise delle tacche in corrispondenza biunivoca con l'insieme di cui sono il modello. La più antica taglia attualmente conosciuta è stata rinvenuta in Congo. Si tratta di un osso di babbuino (20.000–18.000 a.C.) con incisioni poste a gruppi distinti che sono state interpretate in vario modo, anche come computi di fasi lunari.

Taglie in legno sono state utilizzate ad uso personale fino a tempi recenti. Data la scarsa possibilità di falsificare o cancellare un intaglio il loro uso era particolarmente consigliato anche per la redazione di contratti, tasse e bolle di accompagnamento [65].

Se le tacche erano più di quattro emergeva però il limite alla lettura visiva che è stato descritto precedentemente e quindi ben presto si iniziò ad incidere una tacca inclinata o di forma diversa ogni quattro per differenziare non solo la quinta ma anche la decima, la quindicesimaÉ e così via. Se esaminiamo le taglie presenti nei musei etnografici noteremo che molte incisioni somigliano a qualcosa di noto come la X e la V dei numeri romani e quindi si può ritenere che sia proprio da questo metodo di intaglio che il sistema visivo abbia estrapolato la numerazione romana.

I ciottoli

Un esempio di modello, che ha subito una importante evoluzione nel tempo, è rappresentato dalle collezioni di ciottoli. Nella *Mezzaluna Fertile* (Mesopotamia) essi vengono inizialmente sostituiti con palline di creta ma, con lo sviluppo dei primi agglomerati urbani intorno al 7000 a.C., compaiono alcune forme di numerazione tattile. Si tratta di gettoni figurati che rappresentano una determinata quantità di un

Figura 6.4: Ricostruzioni di oggetti in creta rinvenuti in Mesopotamia: gettoni, bulle e tavolette con informazioni di contabilità.

bene conteggiato ma la cui forma varia a seconda della categoria a cui si riferisce.

Questo tipo di rappresentazione numerica, ancora legata al concreto, verrà sostituita nei secoli da gettoni-numero di tipo puramente geometrico (bastoncino, pallina, dischetto, cono, ...), ognuno corrispondente ad un valore numerico noto. La loro comparsa indica il raggiungimento di una rappresentazione astratta del numero [97].

Nel quarto millennio a.C., dalle città-stato sumere si diffonde l'uso di una particolare forma di contabilità: la *bulla*. Si tratta di una palla cava di creta contenente una serie di gettoni-numero, probabilmente usata come bolla di accompagnamento negli scambi commerciali. Col passare del tempo, sulla superficie delle bulle compaiono impronte eseguite con gettoni analoghi a quelli custoditi all'interno. Questo evento (circa 3300 a.C.) viene considerato universalmente come la nascita della scrittura. Nello spazio di pochi anni, la bulla si trasformerà in una tavoletta di creta recante notazioni numeriche additive accostate a ideogrammi, che rappresentano gli oggetti inventariati [84].

In seguito si passerà dagli ideogrammi alla scrittura cuneiforme e alla scrittura numerica babilonese [5, 1]. Essa utilizza un minor numero di simboli in un sistema misto decimale sessagesimale e introduce una notazione posizionale con il tentativo di rappresentare lo zero. Attraverso questo sistema la matematica babilonese raggiunge elevati traguardi, testimoniati per esempio da tavolette come la YBC 7289 (della Yale Babylonian Collection), databile tra il 1900 ed il 1600 a.C., contenente il valore della radice di 2 esatto fino alla quin-

Figura 6.5: Attività ludiche sulla scrittura sillabica con i quipu.

ta cifra decimale. Il tipo di notazione continuerà ad essere utilizzato, specialmente dagli astronomi, fino ai tempi di Tolomeo e lascerà la sua traccia nel nostro modo di conteggiare il tempo e la misura degli angoli.

Una volta acquisito il concetto di scrittura, i vari popoli del Mediterraneo utilizzano la forma decimale additiva e analoghe tecniche di calcolo, seppure con simboli diversi. Un caso a parte è la scrittura usata dagli ebrei e dai matematici alessandrini [64]. In ambedue i casi le lettere dell'alfabeto sono usate come significante numerico. Gli alessandrini per esempio utilizzano le 24 lettere dell'alfabeto greco più tre desuete: le prime nove per le unità, altre nove per le decine e le ultime per le centinaia, da usare comunque additivamente. Per le quantità di ordine superiore venivano usati altri accorgimenti.

I nodi

Un diverso sistema di rappresentazione numerica si basa sui nodi. Esso è stato utilizzato in varie parti del mondo, annodando principalmente paglia o fili di lana. Il più studiato è quello rappresentato dai *quipu* incaici [107, 76]. Esso consiste in un insieme di fili di lana su ognuno dei quali sono distribuiti gruppi di nodi variamente distanziati

Come negli abachi—dove il valore dei gettoni (tutti uguali) dipende dalla posizione sulla scanalatura—in questi artefatti non è la forma, ma la posizione dei gruppi di nodi che determina il valore numerico. Per ottenere un vero significato posizionale tali fili debbono essere allacciati ad una corda detta madre in modo da acquisire il giusto ordine di lettura. Questo sistema di "scrittura" posizionale decimale può a volte risultare ambiguo in quanto lo zero, non aven-

Figura 6.6: Vari tipi di abaco utilizzati in luoghi ed epoche diverse.

do un suo simbolo tangibile, è rappresentato solo da un tratto di filo libero un po' più lungo fra i gruppi di nodi, ad esempio tra centinaia e unità.

Dalle ultime scoperte pare inoltre che l'uso dei quipu si sia evoluto in un esempio notevole di scrittura sillabica. Si tratta dei quipu filografati, nei quali un piccolo oggetto legato all'inizio del filo e seguito da un numero opportuno di nodi, corrisponde ad una sillaba.

Strumenti di calcolo

Nel ripercorrere la storia della numerazione viene spontaneo chiedersi se i diversi stili di registrazione dessero anche la possibilità di eseguire calcoli (proprietà *operative* di una rappresentazione [46]), ed eventualmente con quali metodi, ma anche se non vi fossero tecniche o strumenti che consentissero di alleggerire il noioso ripetersi della stessa procedura al variare dei dati da introdurre.

In effetti, a parte l'impiego delle mani, anticamente sono stati inventati pochi strumenti da calcolo. Oltre ai gettoni sumeri e alle varie forme di abaco—le cui origini si perdono nella notte dei tempi e che si possono considerare una particolare evoluzione dell'uso dei ciottoli—si hanno vaghe notizie solo di regoli a scorrimento e compassi di proporzione [115].

Dopo il ritrovamento del "calcolatore di Antikythera" risalente al primo secolo a.C., si può comunque ipotizzare la presenza di strumenti meccanici altamente specializzati ma estremamente costosi e quindi di diffusione estremamente limitata.

La parte di storia della matematica dedicata alla scuola primaria si esaurisce a questo punto, eventualmente includendo i bastoncini di Nepero, utilizzati per una rivisitazione dell'algoritmo di calcolo che oggi usiamo nelle moltiplicazioni. Si tralasciano, invece, le costruzioni di tipo geometrico di derivazione greca e strumenti che applicano proprietà geometriche come il mesolabio.

6.3 Descrizione

È noto che il bambino acquisisce i concetti di quantità e di sequenza ordinata di azioni in ambito prescolare. La complessa struttura di collegamenti fra le varie zone del cervello che contribuisce all'apprendimento di principi matematici ed algoritmici si forma autonomamente nei primi anni di vita ed ogni piccolo costruisce modelli molto personali circa la rappresentazione mentale della quantità [41]. A volte gli insegnanti sono tratti in inganno dal fatto che gli alunni conoscono le parole numero e la tiritera della conta; questo non significa che abbiano fatto proprio il concetto di numero. All'inizio della prima elementare non tutti i bambini hanno superato la fase tattile, alcuni sono ancora fermi alla sensazione numerica che porta a confondere la numerosità con il volume complessivo. Per questi sarà ancora necessario fare in modo che osservino e confrontino insiemi di piccoli oggetti e che li riproducano in un disegno schematico (dal concreto alla fase grafica). In seguito potranno imparare a contare verbalmente collegando la filastrocca, spesso udita da genitori e nonni, con il significato delle parole numero. Solo alla fine di questo percorso si sarà costituito un legame solido tra la numerosità di un insieme, la parola e il simbolo grafico che la denota.

Inoltre, l'approccio dei piccoli alle procedure di calcolo può essere assai vario, influenzato dall'ambiente e, specialmente nel caso di bambini con genitori provenienti da realtà diverse, da particolari abitudini familiari. Ne sono un esempio i bambini indiani che a casa usano la matematica vedica [60]. Altri possono aver elaborato autonomamente strategie specifiche—"*sette più otto: si deve fare sette più dieci meno due, no: si va al dieci, cioè tre, più quello che manca all'otto, no: togli due e tre da venti*". Si tratta appunto di strategie già elaborate in modo inconscio in età prescolare e che ben difficilmente potranno essere modificate. All'inizio della scolarizzazione può quindi capitare che alcuni bambini vedano negli algoritmi imposti dall'insegnante qualcosa di estraneo alla propria esperienza, una temibile regola calata dall'alto che si pone in conflitto con la strategia che si è già strutturata nel loro cervello e ciò, erroneamente, li fa *sembrare* ma specialmente *sentire* inadatti allo studio della matematica.

Alla luce di queste considerazioni si è proceduto ad organizzare un lavoro interdisciplinare che ha coinvolto le insegnanti di matematica, di italiano, di storia e di educazione all'immagine e sono stati proposti alcuni incontri per far conoscere alle insegnanti il percorso storico relativo allo sviluppo del pensiero logico-matematico. Si è passati quindi alla progettazione didattica che è stata sviluppata in due forme diverse: come introduzione alla conoscenza dei numeri e dell'aritmetica elementare per le classi prima e seconda; come integrazione della storia dei popoli antichi e riflessione sulla numerazione e sugli algoritmi di calcolo già noti nelle ultime tre classi del primo ciclo (si veda anche [13]).

Classi I e II

I bambini della prima classe non hanno ancora il senso dello scorrere del tempo e quindi della storia, ma, con l'aiuto dell'insegnante di italiano, si possono narrare delle storie per evocare la figura degli uomini primitivi e delle loro abitudini di cacciatori-raccoglitori per poi interrogarsi sulla necessità o meno di saper contare. In effetti per chi girovagava per i boschi o per la savana (Roberto: *"e non hanno nemmeno le tasche"*.) sarà stato difficile portarsi appresso più di due oggetti per cui tre saranno stati considerati "molti". Le tre parole-numero *amero* (uno), *alene* (due), *balene* (tanti), ancora usate nel Mato Grosso, divertono i piccoli e rappresentano uno stimolo per riflettere sul concetto di quantità.

In seguito, con salti spazio-temporali l'aula diventa lo spiazzo al centro del villaggio dove le tribù barattano oggetti vari. Gruppi di matite e pennarelli diventano allora insiemi di pesci e pellicce da mettere a confronto. Questi scambi, eseguiti manualmente, rafforzano il concetto di corrispondenza biunivoca, ma specialmente chiariscono il significato di espressioni come "differenza", "supera di. . . ", "è inferiore di. . . " che spesso non appaiono ben chiari nemmeno a livello di scuola superiore. Infine se, avendo due insiemi Ð uno di pesci (più numeroso) e l'altro di frecce Ð si invitano i bambini ad appaiare un pesce con una freccia, fino all'esaurimento dell'insieme numericamente più piccolo, si può far intuire perché la differenza si ottenga con una sottrazione, che spesso viene eseguita "in fiducia" senza averne colto la motivazione. Questo laboratorio sui baratti farà inoltre rafforzare il concetto di *valenza* (*"Quanto vale una pelliccia?" "Una mano di pesci."*) già utilizzato dai bimbi nei loro giochi e fondamentale per l'introduzione della decina.

Per avviare le trattative servirà portare tutte le pellicce? Non basterà portare un modello? Per esempio colorare le dita in corrispondenza di ogni pelliccia. Ma finite le dieci dita?. . . Una uscita nel cortile della scuola offre la possibilità di pensare ad altri modelli: sassolini, foglie, rametti, che sono facilmente trasportabili finché non sono troppo numerosi. Ecco allora un sasso più grosso per rappresentare (*valere*) un certo numero di sassolini, e ugualmente il rametto più grosso, la foglia più grande. Si introduce così il passaggio alla decina e quindi l'avvio alla scrittura posizionale che richiede non solo l'acquisizione di parole nuove ma specialmente l'uso di cifre identiche con valenza diversa.

Una concreta visualizzazione della nuova situazione si può ottenere in classe utilizzando come modello degli stuzzicadenti o meglio dei salamini di creta. La piccola fascina contenete 10 stuzzicadenti accostata ad altri tre sfusi, porta a riflettere sulla semantica della nuova parola "tre-dici". Allo stesso modo la pallina ottenuta utilizzando 10 salamini accostata ad altri 8, chiarisce l'etimologia e facilita la memorizzazione di "dici-otto". L'uso della pallina risulta particolarmente formativo: inizialmente essa viene modellata utilizzando i dieci salamini ma, data la mole complessiva ottenuta, si passa all'uso di una pallina più piccola ma che si conviene *valere* 10 unità. Si arriva così a un passaggio fondamentale: il *cambio*, il *riporto* e l'*andare a prestito*.

"Scrivere" numeri utilizzando palline e bastoncini si dimostra molto utile nella classe seconda quando si prosegue con la numerazione oltre il 20 e si incontrano nuove parole che, con il suffisso enti, enta, anta, non evidenziano chiaramente un collegamento specifico con la decina. Inizialmente si prova a "scrivere" numeri entro il centinaio con palline e bastoncini disposti in ordine sparso; in seguito si osserva la comodità di raggrupparli per genere e si traduce la nuova situazione con la scrittura in cifre, secondo la convenzione del sistema posizionale. Continua poi il parallelismo fra le operazioni con questi "numeri tattili" e le scrittura in cifre. Nelle addizioni, l'aggiunta di una pallina corrisponde al riporto e nella sottrazione si rileva a volte la necessità del prelievo (prestito) di una delle palline. Analogamente, in seguito, si ragionerà sulla moltiplicazione e la divisione, prima con i numeri tattili e poi cercando la corrispondenza sulla pagina scritta.

Una volta acquisito il metodo, è semplice passare a numeri di ordine superiore, inventando una forma che valga 10 palline, per passare poi all'astrazione, aiutati anche dalla lingua italiana (due-cento, sette-cento, cinque-mila...). Questa notazione è comunque di tipo additivo e il valore dipende dalla forma dei gettoni, mentre nella nostra scrittura le cifre assumono valenza diversa a seconda della posizione. Per rafforzare questo concetto può essere utile la presentazione di una scrittura numerica basata sui nodi come quella incaica. Da che parte si tiene il filo? E se non ci sono decine? è un modo divertente per riflettere sul concetto di posizione e sulla necessità di rappresentare lo zero.

Il progetto rivolto al primo biennio finisce a questo punto. Riprenderà con un ripasso nella seconda metà della terza, quando l'insegnante illustrerà i primi passi dell'uomo del Paleolitico.

Classi III, IV, V

In queste classi, il percorso narrativo è presentato cronologicamente integrando la storia con spunti di matematica e tecnologia per cui è importante la collaborazione fra gli insegnanti di storia, matematica e immagine. Inizialmente, ad integrazione di quanto esposto dall'insegnante di storia riguardo le popolazioni preistoriche, si ripete il programma del ciclo precedente ma con maggiori esemplificazioni. Ritorna il concetto di corrispondenza biunivoca attraverso la descrizione delle varie strategie escogitate dai primitivi per esprimere quantità usando parti del proprio corpo. Gli alunni, divisi in piccoli gruppi, si divertono ad inventare corrispondenze diverse utilizzando non solo le dita, ma anche i gomiti, le spalle, le ginocchia, i piedi... (*"Ho un gomito destro di frecce, un mignolo sinistro di guerrieri..."*). Giocando ad indovinare il codice altrui, acquisiscono concetti basilari.

Figura 6.7: Corrispondenza biunivoca fra insiemi di oggetti diversi.

Durante la conta, mentre elencano le parti del corpo, essi notano che è necessario nominarle secondo un ordine precedentemente concordato, e quindi generare una sequenza *ordinata* di parole-numero [60]. Inoltre, apprendono che tale sequenza si conclude con la parola"uomo". Cosa significherà quindi *"Ho pescato un uomo e un ginocchio destro di pesci"*? Si osserva allora che è fondamentale conoscere il numero di parti coinvolte e ciò porta al concetto di *base* (un *uomo*). Si tratta di un processo sostanzialmente analogo a quello che ci porta a pensare una "decina" quando solleviamo il decimo dito per contare con le mani.

Passando poi a ricordare l'insieme degli oggetti usati nelle corrispondenze biunivoche, ci si propone di scoprire, di pari passo con la storia, la loro evoluzione e trasformazione in numeri e le eventuali proprietà *operative*—cioè la potenzialità di ricavare nuove informazioni attraverso manipolazioni formali.

La Mezzaluna Fertile

Lo studio della storia prosegue con la presentazione delle prime civiltà stanziali in Anatolia e Mesopotamia. Studiando i reperti archeologici si può seguire l'evoluzione dei conteggi, dall'uso di palline di creta, ai gettoni figurati, ai gettoni numero, alle "bulle", fino alle prime forme di registrazione scritta [97]. Ad ogni tappa, gli alunni vengono invitati a riprodurre le copie dei reperti presentate durante la lezione: i gettoni figurati che indicano una quantità (convenzionale ma a noi sconosciuta) del bene che raffigurano; i gettoni-numero la cui forma non dipende più dal bene conteggiato e che quindi rappresentano l'idea astratta di quantità; le bulle, palle di creta cave,

Figura 6.8: Strumenti per la contabilità e il calcolo in Mesopotamia.

contenenti gettoni-numero; le prime tavolette di creta, preludio della scrittura cuneiforme.

Avranno questi oggetti proprietà operative? I gettoni-numero certamente si. Con la loro forma: salamino (unità), pallina (decina), conetto (sessantina)... ricordano le operazioni già svolte in seconda elementare anche se ora la base è 60. Le impronte sulla superficie della bulla corrispondenti ai gettoni contenuti all'interno, segnano la nascita della scrittura e stimolano una riflessione su cosa significhi leggere e scrivere. Le tavolette di creta, recanti in un verso la distinta e sul retro il totale dei beni inventariati consentono di risalire al valore delle impronte-numero. Segue quindi l'evoluzione della scrittura da sumerica a cuneiforme e, a discrezione dell'insegnante, si può confrontare la notazione cuneiforme sessagesimale col nostro calcolo dei tempi o nelle operazioni con gli angoli.

L'Egitto

La civiltà egiziana con i suoi monumenti e le sue molteplici divinità occupa certamente la fantasia degli alunni e i simboli misteriosi della matematica egiziana li affascinano. La notazione decimale additiva, peraltro già sperimentata con i babilonesi, rende semplici i calcoli nelle addizioni e sottrazioni ed offre un bell'esempio di applicazione della proprietà distributiva nell'algoritmo della moltiplicazione [28]. L'occhio di Horus porta il discorso sulle frazioni ed alcuni dei problemi del papiro di Rhind offrono lo spunto per parlare della funzione dei geometri, della geometria e delle tecniche di costruzione dei templi. Lo spago chiuso ad anello e suddiviso in 12 parti uguali che si trasforma in un triangolo rettangolo con i lati di 3,4,5 intervalli non solo viene usato in giardino per tracciare sul terreno la pianta di una futura piramide, ma si presta a riprendere il concetto di misura e a cogliere intuitivamente le similitudini.

L'area mediterranea

Un breve excursus tra le civiltà mediterranee e sulle relative notazioni numeriche stimola la riflessione sui supporti usati per la scrittura. Ne vengono esaminati alcuni esempi e ricostruzioni: tavolette di creta per le civiltà micenee, cretesi e per tutto il medio oriente; papiro per l'Egitto (solo se i documenti erano importanti); cocci di terracotta (*ostracon*) per greci ed egiziani; corteccia di betulla per il nord Europa e, più tardi, pergamena, per tutta l'area mediterranea, ma usata solo per libri o atti importanti. Dalle missive private su tavolette cuneiformi imbustate in un "sacchetto di creta" con relativo indirizzo, passando per papiri e pergamene con la legatura sigillata, per tavolette di cera, molto usate dai romani, si arriva alle lavagnette che i bambini utilizzano a scuola nei film sul Far West. Osservando come tutti i supporti utilizzati siano o costosi o di limitata estensione, possiamo ben capire perché, per secoli, l'abaco e gli abacisti siano stati la colonna portante del calcolo commerciale e amministrativo.

La Grecia

Nell'illustrare la matematica greca, dopo aver descritto brevemente la notazione con numeri acrofonici [28]—utilizzati ancora nel V sec a.C. negli scambi economici—e dopo aver accennato alle operazioni effettuate con i numerali alfabetici detti alessandrini (Anna: "*...ma queste tabelline sono MOSTRUOOOSE!*"), è più interessante soffermarsi sui grandi matematici greci.

Ciò consente di introdurre il discorso sulla geometria attraverso alcune attività ludiche. Per esempio, imitando Talete, in una giornata di sole si può osservare l'ombra di un bastone piantato nel cortile per stimare l'altezza dei pali della luce. In seguito l'equivalenza fra figure piane, analizzata impiegando carta e forbici, aiuta a chiarire i concetti di superficie e di misura dell'area: probabilmente anche Pitagora aveva affrontato in termini analoghi la relazione fra i quadrati costruiti sui lati di un triangolo rettangolo.

Presentando invece la figura leggendaria di Archimede, si sollecita l'osservazione di fenomeni come il galleggiamento di barchette di carta di alluminio, il travaso di liquidi tra recipienti comunicanti, il gioco delle altalene, l'effetto termico degli specchi ustori. Attraverso simili esperienze si può accennare a cosa significhi "studiare la fisica".

Tornando infine alla scrittura numerica alessandrina, utilizzata da Archimede, si può citare l' "Arenario" dove egli illustra per la prima volta un metodo per poter rappresentare qualsiasi numero, per quanto grande. Con il nostro sistema posizionale ciò sembra scontato, ma con un sistema additivo come quello greco si sarebbe dovuto introdurre un simbolo diverso per ogni nuova unità di grandezza. Un buon punto in favore della notazione posizionale, che comunque dovrà attendere centinaia di anni per essere universalmente accettata.

Figura 6.9: Proprietà operative della rappresentazione numerica posizionale in un abaco romano.

Roma

All'epoca dei Tolomei il centro della scienza si era progressivamente spostato ad Alessandria che, anche dopo la conquista romana e fino alla morte di Ippazia, mantenne il suo ruolo di polo scientifico per eccellenza in tutto l'impero. Che dire quindi a proposito della civiltà romana? Il suo pregio è stato il saper cogliere e sfruttare quanto c'era di buono nella scienza sviluppata da altri popoli. L'ingegneria idraulica e l'arco degli Etruschi, il calcolo e l'abaco della Grecia e del Medio Oriente, l'indigitatio e il calendario dell'Egitto ne sono alcuni esempi. Per quanto riguarda il sistema di numerazione, si fa osservare ai bambini che esso è talmente simile a quello etrusco da potersi considerare una sua derivazione [65]. Quello etrusco, a sua volta, proviene probabilmente dall'uso dei pastori che, nell'incidere le tacche sulle taglie, strumento già trattato precedentemente, differenziavano la quinta, la decima, e così via.

Restano da descrivere alcuni strumenti e metodi di calcolo. Il posto d'onore spetta certamente all'abaco, usato ancor oggi in varie parti del mondo, ma si possono considerare anche regoli a scorrimento per moltiplicazioni e divisioni (*"Così non servono le tabelline!"*), antesignani di quelli molto più complessi, usati fino a qualche decennio fa. L'illustrazione del "calcolatore di Antikythera" [81] fa ipotizzare l'esistenza di strumenti più raffinati.

Alla fine del percorso si possono citare alcune tecniche di calcolo, anche se estranee alle civiltà studiate. In particolare l'uso dello schema "a gelosia" per le moltiplicazioni o, allo stesso scopo, il divertente sistema Maya (o vedico), che non presuppone la conoscenza delle odiate tabelline. Ambedue i casi serviranno a far riflettere sulla proprietà distributiva della moltiplicazione, sul valore posizionale delle cifre e sulle analogie del nostro algoritmo per la moltiplicazione in colonna. Con la stessa finalità si possono infine presentare e far costruire i bastoncini di Nepero [31].

6.4 La voce della scuola

L'approccio proposto in questo articolo interpreta l'evoluzione storica non solo come fonte di contenuti da portare in classe, ma anche come strumento di pianificazione pedagogico-didattica [75, 89].

Gli argomenti illustrati non erano noti a gran parte delle insegnanti, che vi hanno però ravvisato corrispondenze con il percorso cognitivo dei propri alunni. Hanno pertanto colto l'opportunità di servirsi di un'attività didattica interdisciplinare, che mettesse a confronto non solo le discipline tra di loro, ma anche i processi cognitivi individuali con quelli sociali. Al termine del percorso didattico, le insegnanti hanno rilevato molteplici aspetti positivi:

a) La valorizzazione delle attività manipolatorie, piuttosto trascurate ultimamente, ma fondamentali per la conquista del concetto astratto—"*Nulla c'è nell'intelletto che precedentemente non sia passato per i sensi*" (Aristotele).

b) L'utilizzo di piccoli oggetti, che ha facilitato la comprensione del passaggio dall'unità alla decina e dato un senso logico alla scrittura posizionale dei numeri.

c) L'aspetto ludico, che ha fatto da sfondo all'attività didattica, potenziando l'interesse degli alunni e rendendoli più ricettivi a nuove conoscenze [61].

d) La riproduzione di oggetti e tecniche di calcolo in uso nell'antichità, che ha messo in evidenza abilità inaspettate proprio negli alunni scolasticamente più carenti, dando loro coraggio e fiducia in se stessi e spronandoli a cimentarsi anche con la pagina scritta.

e) L'interdisciplinarità, che ha favorito una visione più completa delle civiltà studiate attraverso l'acquisizione di un'idea unitaria e non frammentaria della cultura.

I bambini sono sempre apparsi particolarmente interessati. Superata l'iniziale timidezza, sono intervenuti, talvolta animatamente, per comunicare le proprie impressioni, per riferire le proprie esperienze, oppure per fare delle proposte. Hanno cercato di contribuire alle spiegazioni portando a scuola libri per l'infanzia contenenti illustrazioni o testi corrispondenti a quanto appreso. Questo tipo di attività favorisce un approccio giocoso al calcolo e alla matematica. L'aspetto teatrale coinvolge, diverte e rende partecipi anche gli alunni più schivi.

In questo contesto la presenza della lavagna luminosa ha enfatizzato il lato spettacolare. Le immagini proiettate sullo schermo richiamano la televisione ma non suscitano lo stesso atteggiamento passivo:

su di essa si può interagire e far vedere ai compagni il proprio operato. Possono appoggiarci sopra oggetti o gettoni e far vedere, per esempio, la costruzione di una corrispondenza biunivoca a tutta la classe o fare operazioni con l'abaco cogliendo i suggerimenti dei compagni. Posare un lucido in una posizione sbagliata, per esempio a rovescio, risveglia l'attenzione e tutti partecipano con suggerimenti per la correzione, curiosi di vederne il contenuto. Non c'è la preoccupazione della "interrogazione alla lavagna" e anche i più timidi sono attratti dal lavorare su questo strumento ormai sconosciuto.

Va inoltre osservato che questo tipo di esperienze mette il bambino in condizione di esercitare il coordinamento delle funzioni sensomotorie e della verbalizzazione, indispensabile per porre le basi dell'apprendimento soprattutto nei primi anni di scolarizzazione. Per esempio, per contare gli oggetti di un insieme il bambino deve stabilire una "corrispondenza biunivoca tra quattro categorie distinte di elementi: gli oggetti da enumerare, i gesti del braccio e della mano, i movimenti dello sguardo, la pronuncia delle parole" [110]. (Al riguardo si veda anche [69].)

Il metodo interdisciplinare ha mostrato la sua piena validità, e ne è un bell'esempio il momento in cui, su invito dell'insegnante di storia, gli alunni hanno simulato un mercato nella piazza di Ur, divertendosi a manipolare gettoni, dividendo, moltiplicando, sommando, sottraendo, sotto la supervisione dei "sapientini" che con carta e penna controllavano l'esattezza dei calcoli. L'insegnante di matematica ha sfruttato l'occasione per invitare gli alunni a formalizzare le procedure di scambio e di baratto, trasformandole in testi di problemi da sottoporre ai propri compagni. Per ottenere una stesura completa e non ambigua, è stata coinvolta anche l'insegnante di italiano, che ne ha tratto un divertente esercizio di lettura e scrittura di un testo "scientifico".

Vale infine la pena richiamare che, come sottolineato da Duval nel caso della matematica [48, 47], per l'apprendimento di concetti astratti l'obiettivo principale dell'educazione primaria non dovrebbe essere tanto quello di acquisire conoscenze disciplinari specifiche, ma di favorire lo sviluppo di una "architettura cognitiva". Duval quindi sottolinea che "le acquisizioni cruciali in questo senso non sono concettuali ma funzionali" [48].

Questo approccio alla conoscenza dei concetti matematici consente inoltre di porre le basi per un corretto apprendimento dell'informatica, che vada al di là dell'accezione strumentale oggi prevalente. L'utilizzo di applicazioni quali internet, editor di testo, fogli elettronici, ecc. a supporto di varie attività non è di per sé adeguato a favorire lo sviluppo di strutture mentali nei bambini [24, 25, 45, 55]. I concetti e le attività qui descritte possono invece risultare utili per un corretto insegnamento dei fondamenti dell'informatica, recuperando l'approccio dell'*informatica povera*, o *unplugged* [10], purtroppo dimenticata anche nella scuola di base dove invece sarebbe particolarmente appropriata. Per una discussione più articolata delle implicazioni dell'approccio da un punto di vista specificamente informatico si rimanda agli articoli [14, 15].

6.5 Conclusioni

Nonostante le difficoltà incontrate nell'organizzazione delle ore di compresenza e per la sovrapposizione di altri progetti, ci sembra che le attività abbiano avuto una accoglienza positiva sia da parte degli alunni, sempre interessati e coinvolti, sia delle insegnanti.

Al fine di una valutazione più oggettiva, gli allievi sono stati invitati a rispondere a un questionario di percezione e, cinque mesi dopo la conclusione delle attività, a un test sulle conoscenze acquisite che includeva esercizi sulle tecniche di codifica e di trattamento dell'informazione. I riscontri raccolti consentono di farsi un'idea riguardo l'efficacia del percorso proposto in termini di coinvolgimento dei bambini e di ritenzione delle nozioni apprese. Si è così potuto osservare che, a distanza di tempo, gli allievi sono ancora in grado di ricordare più cose di quante si possa immaginare, avendo assimilato comunque meglio ciò di cui hanno avuto esperienza *concreta*, in particolare attraverso il lavoro manuale che hanno molto apprezzato.

A conferma dell'interesse suscitato, alcune insegnanti hanno espresso il desiderio di riproporre autonomamente il lavoro alla ripresa del ciclo scolastico: *"Si è così creato un importante 'ponte' culturale che, abbracciando discipline diverse come matematica, tecnologia, storia ed arte, ha saputo condurre gli alunni ad una comprensione più profonda, corroborata da esperienze laboratoriali, anche degli strumenti che l'uomo ha ideato per risolvere problemi non solo matematici in epoche storiche ed in civiltà diverse"*. *"Abbiamo valutato positivamente la metodologia usata che prevedeva il ruolo attivo dei bambini nel trovare soluzioni sia nella ricerca simbolica, che nella registrazione dei dati"*. *"È stata un'esperienza assolutamente valida, da ripetere e diffondere"*.

6.6 Ringraziamenti

Un particolare ringraziamento a Rossana Vermiglio, coordinatrice del PLS "Matematica e Statistica" per la sede di Udine, e alle insegnanti che hanno contribuito alla realizzazione del progetto.

Riferimenti bibliografici

[1] AA. VV. «L'écriture depuis 5000 ans – des hiéroglyphes au numérique». In: *Les collections de L'Histoire* 29 (ott. 2005).

[5] Bruno G. Bara. *Il sogno della permanenza*. Bollati Boringhieri, 2003.

[6] John D. Barrow. *Pi in the Sky: Counting, Thinking, and Being*. Ed. italiana: La luna nel pozzo cosmico, Adelphi. Oxford University Press, 1992. ISBN: 9780198539568.

[7] Maria Bartolini Bussi. «Artefacts and utilization schemes in mathematics teacher education: place value in early childhood education». In: *J. of Mathematics Teacher Education* 14.2 (2011), pp. 93–112.

[13] Diana Bitto. «Archeologia della matematica alle elementari». In: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate – Rivista del Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin"* 34A–B.3 (2011), pp. 267–282.

[14] Diana Bitto e Claudio Mirolo. «"Archaeology of Information" in the Primary School». In: *Proc. of ISSEP 2013*. Vol. 7780. LNCS. Springer, 2013.

[15] Diana Bitto e Claudio Mirolo. «Archéologie de l'information à l'école primaire». In: *Sciences et technologies de l'information et de la communication (STIC) en milieu éducatif*. DidaPro-DidaSTIC 2013. Clermont-Ferrand, France: EduTice, 2013. URL: http://edutice.archives-ouvertes.fr/.

[24] Éric Bruillard. «From the didactics of computer science towards the didactics of instrumental activities with ICT». In: *2nd Greek Conference on Didactics of Informatics*. Volos, 2004.

[25] Éric Bruillard. «Informatique en contexte scolaire, enseignement, diffusion: quelles recherches?» In: *Séminaire de didactique des sciences expérimentales et des disciplines technol.* STEF, 2006, pp. 115–128.

[28] Lucas N.H. Bunt, Phillip S. Jones e Jack D. Bedient. *The historical roots of elementary mathematics*. Ed. italiana: Le radici storiche delle matematiche elementari, Zanichelli. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.

[29] Brian Butterworth. *The Mathematical Brain*. Ed. italiana: L'intelligenza matematica, Rizzoli. London, UK: Macmillan, 1999. ISBN: 978-0-333-76610-1.

[31] Jean-Luc Chabert et al. *Histoire d'algorithmes: du caillou à la puce*. english edition: A history of algorithms, Springer (1999). Belin, Paris, 1994.

[41] Stanislas Dehaene. *La Bosse des Maths*. english edition: The number sense, Oxford University Press (1997). Paris: Odile Jacob, Paris, 1997.

[45] Charles Duchateau. «Mais qu'est la didactique de l'informatique devenue?» In: *Le technologies en éducation: Perspectives de recherches et questions vives – Actes du symposium*. INRP, 2002, pp. 33–42.

[46] Paul E. Dunne. *Course notes on the History of Computation*. Retrieved (Sept 2013) at: http://cgi.csc.liv.ac.uk/ ped/teachadmin/histsci/content.html.

[48] Raymond Duval. «Comment décrire et analyser l'activité mathématique? Cadres et registres». In: *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*. Vol. 7. IREM, 2002, pp. 83–105.

[54] John Fauvel e Jan Van Maanen, cur. *History in Mathematics Education – The ICMI Study*. Springer Netherlands, 2002.

[55] Cédric Fluckiger. «L'école l'épreuve de la culture numérique des élèves». In: *Revue française de pédagogie* 163 (2008), pp. 51–61.

[60] George Gheverghese Joseph. *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*. 3rd edition; 1st edition: I.B. Tauris, London/New York, 1991. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2011. ISBN: 978-0-691-13526-7. URL: press.princeton.edu.

[61] Daniel Goleman. *Emotional intelligence*. New York: Bantam Books, 1995.

[64] Lancelot Hogben. *Maps, Mirrors and Mechanics: Beginnings of science*. London: William Heinemann, 1973.

[65] Georges Ifrah. *Histoire universelle des chiffres*. english edition: Universal history of numbers, Harville Press (1998). Paris: Robert Laffont, 1994.

[69] A.-S. Lecontre e V. Camos. «Le role du geste dans les apprentissages numériques: les stratégies de dénombrement chez les patients infirmes moteurs cérébraux». In: *A.N.A.E. – Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant* 78 (2004), pp. 195–201.

[70] Claude Lévi-Strauss. «La vie familiale et sociale des Indiens Nambikwara». In: *Journal de la Société des Américanistes* 37 (1948), pp. 1–132. DOI: 10.3406/jsa.1948.2366.

[76] Clara Miccinelli e Carlo Animato. *Quipu: Il nodo parlante dei misteriosi Incas*. Genova: ECIG, 1989.

[81] Xenophon Moussas. *The Antikythera Mechanism – The oldest computer and mechanical Cosmos*. School of Physics and Astronomy, University of Birmingham. Booklet commissioned by the School of Physics and Astronomy, University of Birmingham for the Antikythera Mechanism Exhibition held on Tuesday 17 October 2014. 2014.

[84] H.J. Nissen, P. Dameron e R.K. Englund. *Frühe Schriften und Techniken der Wirtschaftsverwaltung im alten Vorderen Orient*. english edition: Archaic bookkeeping, The University of Chicago (1993). Hildesheim: Verlag Franzbecker, 1990.

[97] Denise Schmandt-Besserat. *How Writing Came About*. Austin: The University of Texas Press, 1996.

[107] Gary Urton. *Signs of the Inka Khipu: Binary Coding in the Andean Knotted-String Records*. Austin: The University of Texas Press, 2003.

[108] Giorgio Vallortigara e Nicla Panciera. *Cervelli che contano*. Milano: Adelphi, 2014. ISBN: 978-88-459-2932-8.

[110] Gérard Vergnaud. «Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance». In: *Actes du colloque GDM: La notion de compétence en enseignement des mathématiques*. A cura di J. Portugais. 2002, pp. 6–27.

[115] Michael R. Williams. *A History of Computing Technology*. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1997.