Dagli antichi algoritmi al calcolatore universale

Paolo Giangrandi
paolo.giangrandi@dimi.uniud.it

Università degli Studi di Udine

28/04/2010

Sommario

1 Introduzione agli algoritmi 4
Dal problema all'algoritmo 5
Il concetto di algoritmo 7
Paradigmi di calcolo 9
L'origine del termine "algoritmo" 10
2 La macchina aritmetica 16
La scrittura dei numeri 17
Sistemi di numerazione additivi 19
Il sistema di numerazione egiziano 22
La moltiplicazione degli antichi egizi 26
Sistemi di numerazione posizionale 28
Il sistema di numerazione babilonese 28
L'india e il sistema di numerazione posizionale 30
I numeri: dall'India all'Europa attraverso gli Arabi 35
Gli algoritmi della moltiplicazione posizionale in Europa 42
Dalle frazioni decimali ai numeri decimali con la virgola 47
I limiti della macchina aritmetica: grandezze incommensurabili 52
3 La macchina geometrica 55
I Greci e le costruzioni con riga e compasso 56
Una teoria matematica per la macchina geometrica 58
I problemi classici non risolubili con riga e compasso 64
I limiti della macchina geometrica 66
4 La macchina algebrica 67
Introduzione 68
L'algebra retorica e sincopata 71
L'algebra sincopata di Diofanto 75
L'algebra di Brahmagupta 83
Le equazioni di al-Khwarizmi 86
L'algebra simbolica 90
Verso il calcolo simbolico 92
Da Viète alla notazione simbolica moderna 96
Oltre le equazioni di secondo grado 103
La risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado 103

Alla ricerca della soluzione delle equazioni di quinto grado 107
Il teorema fondamentale dell'algebra 111
I limiti della macchina algebrica: il teorema di Abel-Ruffini 113
5 La macchina logica 119
Introduzione 120
Inventare la macchina logica 122
La Characteristica Universalis di Leibniz 122
L'algebrizzazione della logica di Boole 126
L'ideografia di Frege 131
Il programma di Hilbert 135
Paradossi e crisi dei fondamenti della matematica 135
Il programma di Hilbert 138
L'assiomatizzazione della matematica 139
I Principia Mathematica di Russell e Whitehead 141
Le domande di Hilbert 144
Gödel: i limiti della macchina logica 147
6 La macchina universale 151
L'Entscheidungsproblem 152
1936: due risposte per lo stesso problema 153
Il lambda calcolo di Church e Kleene 155
Turing e l'astrazione del processo di calcolo 157
La macchina di Turing universale 175
La tesi di Turing-Church 177
I limiti della macchina universale: l'indecidibile 178

1 Introduzione agli algoritmi

La storia dell'informatica non riguarda

- solo lo **sviluppo tecnologico** degli strumenti di calcolo e del moderno computer,
- ma include anche lo studio dei **procedimenti di calcolo** per risolvere problemi (sia quelli eseguiti dall'uomo che quelli eseguiti automaticamente dagli strumenti di calcolo).

In informatica, i procedimenti di calcolo vengono comunemente denominati **algoritmi**.

> *Un **algoritmo** è una procedura di calcolo descritta in modo sufficientemente preciso atta a risolvere un determinato problema.*

Nel corso dei secoli la concezione e il modo di descrivere gli algoritmi è cambiato in modo significativo e oggi, come sappiamo, è possibile scrivere algoritmi che possono essere eseguiti automaticamente su macchina.

Dal problema all'algoritmo

Nella risoluzione di un problema troviamo diversi elementi caratteristici come è illustrato nella seguente figura:

- Il ***problema***, come sappiamo, è costituito da una richiesta di informazione che devono essere ricavate a partire da un insieme di dati/informazioni note.
- L'***algoritmo*** è un procedimento risolutivo costituito da un insieme finito di istruzioni che, eseguite in ordine e in modo preciso, permettono di determinare i risultati del problema a partire dalle informazioni disponibili. Ogni istruzione deve essere elementare, non ambigua e descritta in modo sufficientemente preciso e completo per poter essere eseguita "meccanicamente".
- L'***agente di calcolo*** rappresenta colui che esegue materialmente le operazioni specificate nell'algoritmo al fine di risolvere il problema; può essere rappresentato da una persona, oppure da un sistema automatico.

- La ***memoria*** rappresenta il supporto dove vengono conservate le informazioni non solo iniziali ma anche quelle che vengono prodotte man mano che si esegue l'algoritmo.
- I ***risultati***, infine, rappresentano le informazioni desiderate e possono essere formate semplicemente da un singolo dato o da una risposta si/no, oppure possono essere costituite da un insieme strutturato e ampio di informazioni come ad esempio la dimostrazione di un teorema.

Il concetto di algoritmo

Un algoritmo è una sequenza finita di istruzioni per manipolare simboli (segni) secondo regole sintattiche precise.

Ogni regola di manipolazione deve essere "meccanica", deve prescindere dal significato dei simboli e deve essere deterministica, cioè non deve essere legata ad aspetti probabilitistici o di altra natura. Le regole di manipolazioni che possiamo utilizzare per manipolare i simboli iniziali devono appartenere ad un insieme prestabilito, discreto e finito di operazioni.

Un "buon" algoritmo deve soddisfare deve caratteristiche:

Caratteristiche generali degli algoritmi

1. **un algoritmo deve essere composto da un insieme finito di istruzioni;**
2. **ci deve essere un agente di calcolo capace di eseguire le istruzioni dell'algoritmo;**
3. **non ci deve essere ambiguità sul significato di ogni operazione elementare specificata nell'algoritmo;**
4. **le istruzioni dell'algoritmo vengono eseguite con passi deterministici senza ricorrere a metodi casuali;**
5. **le operazioni descritte nell'algoritmo devono essere eseguite per passi discreti senza l'uso di metodi 'continui' o di dispositivi analogici;**

6. **l'agente di calcolo può utilizzare una memoria in cui tenere i risultati intermedi per poi utilizzarli nelle fasi successive;**
7. **i dati elaborati nell'algoritmo devono essere rappresentabili con un alfabeto finito di simboli e devono essere di lunghezza finita;**
8. **l'insieme delle istruzioni di base che l'agente di calcolo è in grado di svolgere è finito;**
9. **non c'è alcun limite al numero di istruzioni che possono essere svolte durante l'esecuzione di un algoritmo; qualora l'esecuzione dell'algoritmo non abbia termine, non sarà possibile conoscere i risultati finali prodotti nell'esecuzione dell'algoritmo;**
10. **non c'è alcun limite alla quantità di memoria che può essere utilizzata durante l'esecuzione dell'algoritmo.**

Per molti secoli il **termine algoritmo ha assunto le connotazioni di procedimento risolutivo per un problema a prescindere dal fatto che esso fosse "effettivo"**, cioè solo se opera su una rappresentazione finita con regole meccaniche secondo le caratteristiche appena elencate.

Vedremo quindi algoritmi effettivi come il metodo di moltiplicazione indiana per i numeri naturali rappresentati in forma posizionale, ma anche procedimenti che non rientrano nella moderna definizione di algoritmo come le procedure con riga e compasso dei Greci.

Paradigmi di calcolo

Ogni algoritmo è legato ad un particolare modello di calcolo a secondo del tipo di oggetti manipolati e a seconda delle operazioni applicate: possiamo operare con numeri, con stringhe composte da lettere, con equazioni, con figure, ecc.

Nel corso dei secoli sono stati introdotti diversi modelli computazionali a seconda del tipo di oggetti manipolati. I paradigmi storicamente più rilevanti sono:

- macchina aritmetica,
- macchina geometrica,
- macchina algebrica e
- macchina logica

Questi modelli di calcolo sono stati essi stessi oggetto di studio e i matematici hanno saputo metterne in rilievo caratteristiche e limiti.

L’origine del termine “algoritmo”

Fig. Statua di al-Khwarizmi.

Fig. Page from al-Khwarizmi's Kitab al-Jabr wal-Muqabala, the oldest Arabic work on algebra.

La parola "algoritmo" ha origine in Medio Oriente e proviene dal nome latinizzato del matematico persiano al-Khwarizmi.

Al-Khwarizmi scrisse diversi trattati e tra questi il trattato più famoso è "*al-Kitāb al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wa l-Muqabala*" (Compendio del calcolo per mezzo della restaurazione e del confronto), contenente le **prime regole elementari del calcolo algebrico** per risolvere equazioni.

La sua opera "Kitab al-Jam'a wal-Tafreeq bil Hisab al-Hindi", in cui veniva descritto il sistema posizionale decimale inventato dagli indiani, venne tradotta in latino attorno al 1120 con il titolo "***Algoritmi de Numero indorum***". La traduzione latina iniziava così: "*Dixit Algoritmi….*

A poco a poco, la parola latina "**algorismus**" (o "**algorithmus**") cominciò ad essere usata per indicare i procedimenti di calcolo per **eseguire le quattro operazioni aritmetiche nel sistema decimale** in contrapposizione al sistema di numerazione romano e all'uso dell'abaco e tale uso portò quasi a dimenticare il collegamento tra il termine "algorismus" e il matematico arabo, collegamento che venne riscoperto solo nella metà del XIX secolo, quando le opere del matematico arabo vennero ritrovate dopo un lungo oblio.

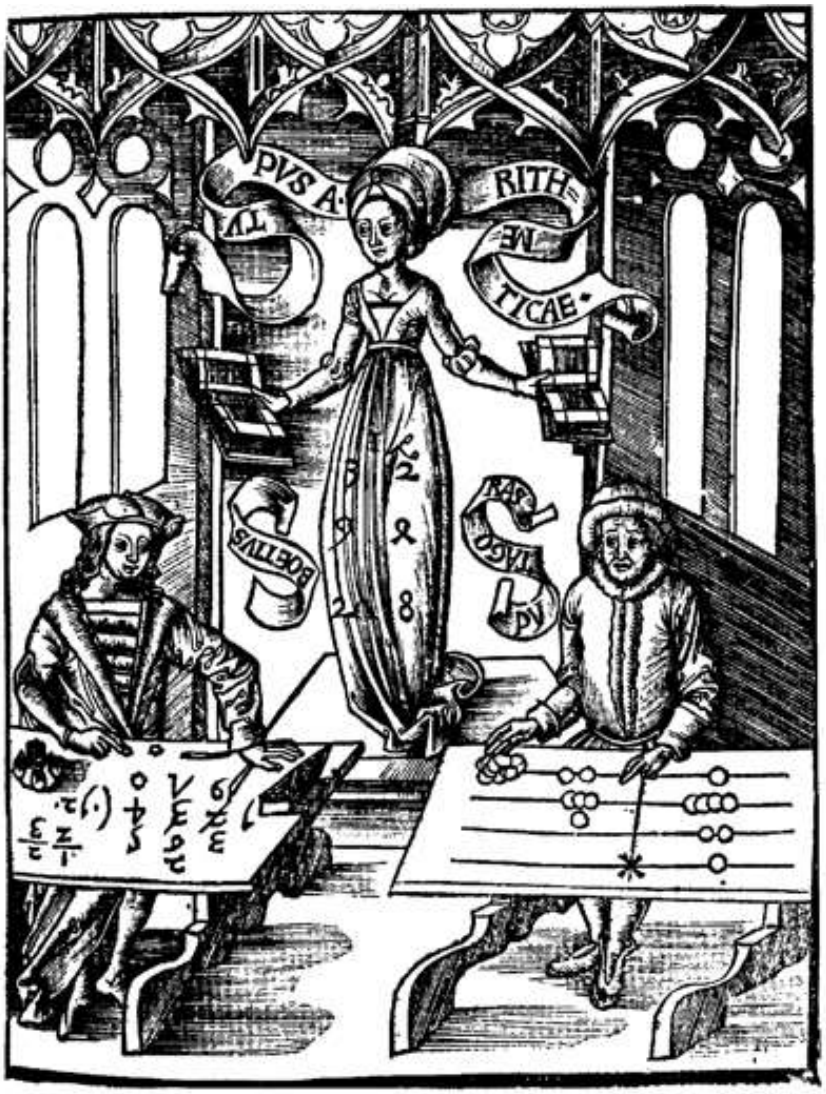


Fig. Un abacista (che utilizza una tavola per contare) in competizione con un algorista (che utilizza il sistema decimale posizionale).

Nei secoli XII e XIII gli "**algoristi**" erano coloro che adottavano i nuovi metodi per eseguire le operazioni aritmetiche esposti nel trattato di al-Khwarizmi.

Questi algoristi erano in "competizione" con gli abachisti, che per eseguire le operazioni adottavano ancora l'abaco.

Così **Tartaglia** nel 1500 spiega all'inizio del secondo libro del *General Trattato* il significato del termine:

> *La Pratica Aritmetica, come afferma Giovan de Sacrobusto, fu data compendiosa in luce da un Philosopho detto Algo, e per questa causa fu detta Algoritmo, over Algorithmo. Le specie del qual Algoritmo, over Algoritmo, secondo Giovan de Sacrobusto, Perdocimo de Beldemandis, e Michel Scotto sono nove.*

Il "**Philosopho Algo**" rappresenta ovviamente al-Khwarizmi.

Successivamente, il termine algoritmo finì per indicare non solo i metodi per eseguire le quattro operazioni aritmetiche, ma un qualunque procedimento di calcolo atto a risolvere un problema di calcolo.

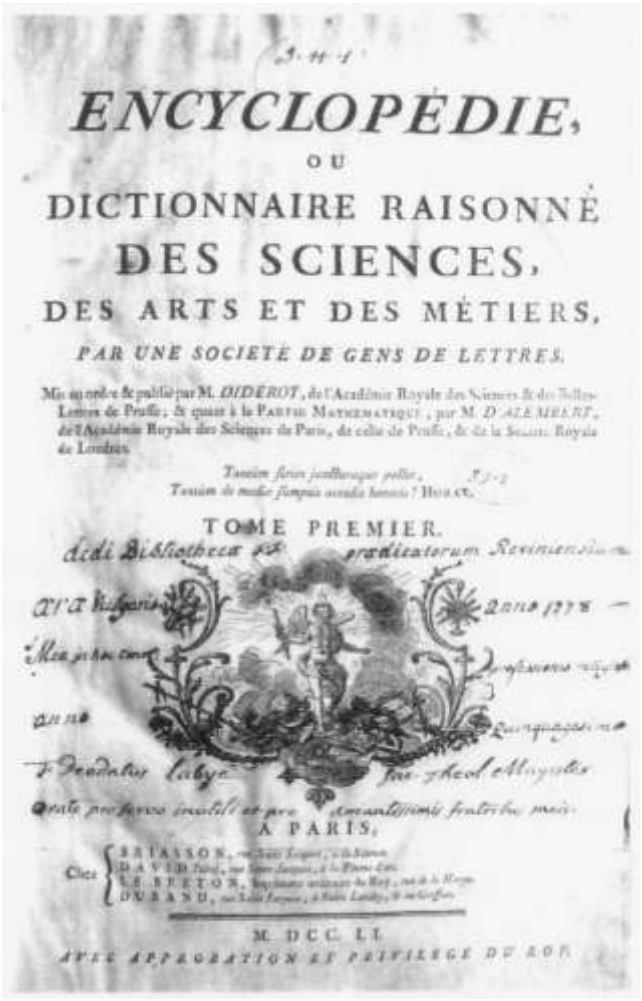
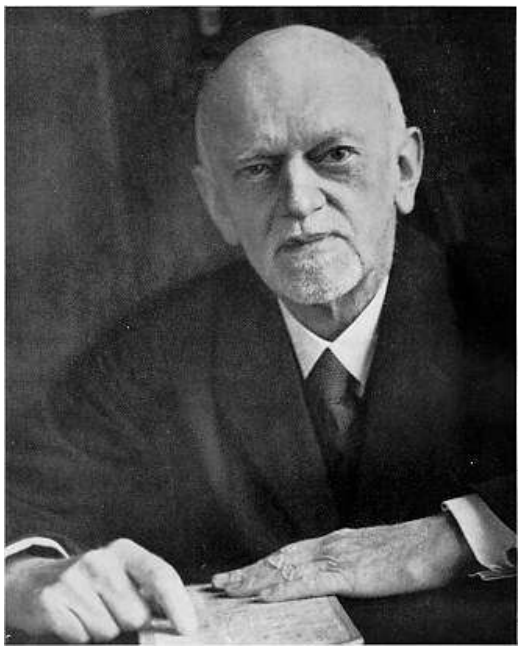

ENCYCLOPÉDIE,
OU
DICTIONNAIRE RAISONNÉ
DES SCIENCES,
DES ARTS ET DES MÉTIERS,
PAR UNE SOCIETÉ DE GENS DE LETTRES.
TOME PREMIER.
A PARIS,
M. DCC. LI.

Fig. Frontespizio dell'Enciclopedie di Diderot e D'Alembert (1751-1772).

D'Alembert definisce in questo modo il termine algoritmo: "**Termine arabo, usato da molti autori, e particolarmente dagli spagnoli per indicare la pratica dell'algebra. Può anche indicare l'aritmetica delle cifre… La stessa parola può in generale significare il metodo e la notazione per tutti i tipi di calcolo. In questo senso, parliamo di algoritmo del calcolo integrale, di algoritmo del calcolo esponenziale, di algoritmo dei seni, ecc.**"



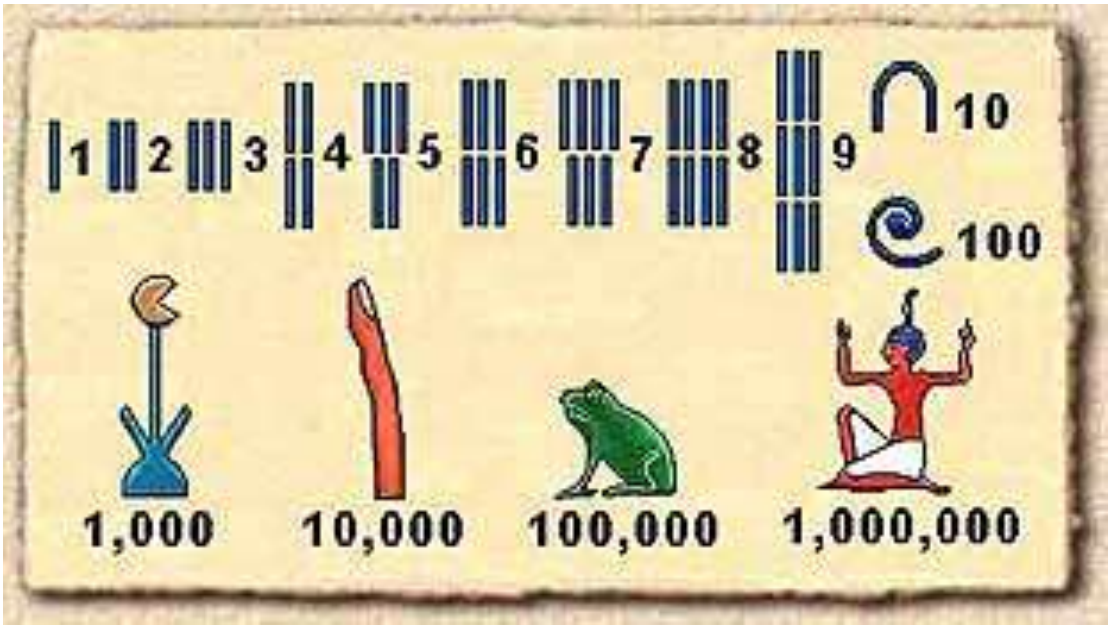
Per molto tempo non si è sentita l'esigenza di dare una definizione più chiara e precisa del concetto di algoritmo.

Nel '900 il termine assumerà un significato più preciso nell'ambito dello studio dei fondamenti stessi della matematica, grazie soprattutto al **programma di ricerca** lanciato dal grande matematico tedesco **David Hilbert**.

I problemi posti da Hilbert porteranno i matematici a precisare meglio gli aspetti caratterizzanti gli algoritmi. Nel 1935-37 appariranno finalmente i lavori di **Alonzo Church** e **Alan Turing**, che gettano le basi della moderna definizione di algoritmo.

2 La macchina aritmetica

Paolo Giangrandi
paolo.giangrandi@dimi.uniud.it



Università degli Studi di Udine

28/04/2010

La scrittura dei numeri

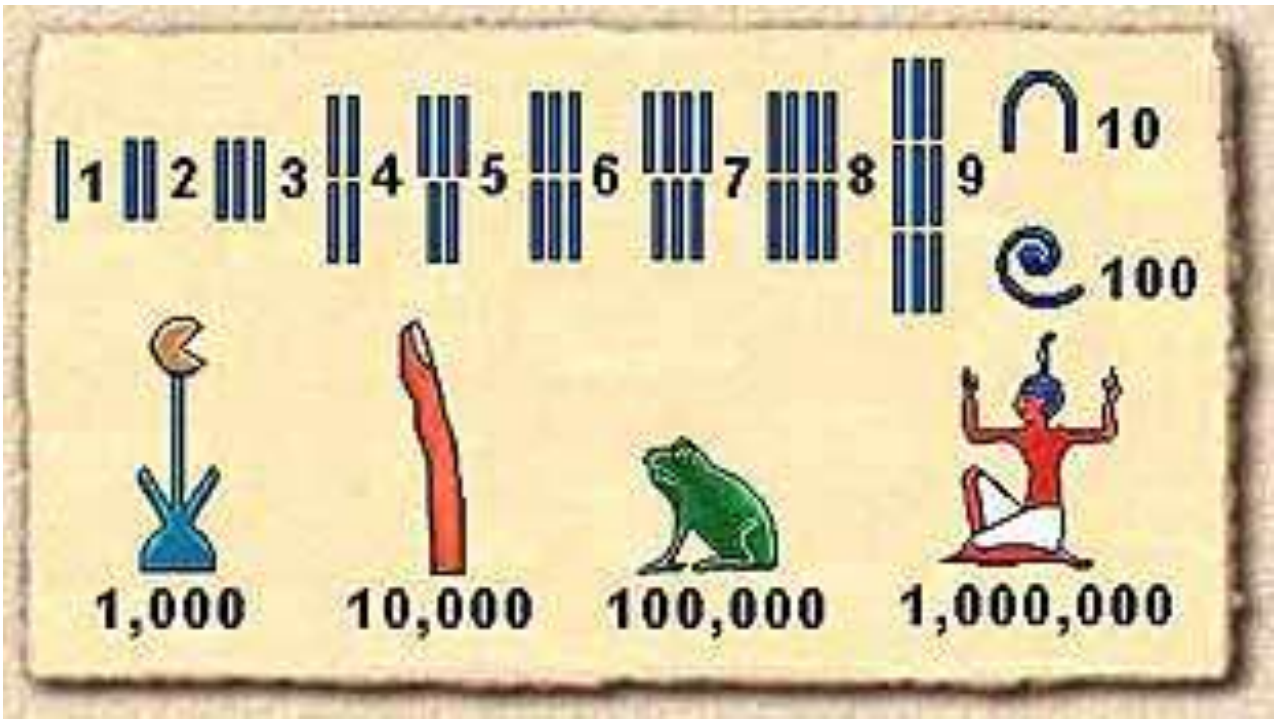


Fig. Sistema di numerazione egizio.

La scrittura dei numeri ha posto per molti secoli il problema di trovare una rappresentazione efficace che consenta di operare su di essi in modo efficace.

Nel corso dei secoli il modo di rappresentare i numeri è cambiato non solo in termini di simboli usati, ma anche come principio di funzionamento.

Due sono gli aspetti più importanti che hanno caratterizzato la scrittura dei numeri:

- il **concetto di base** e
- la presenza o meno del ***sistema posizionale***.

Mentre nelle civiltà più antiche prevalsero sistemi di numerazione additivi, a partire dal IV-V sec. d.C. in India si diffuse quel sistema posizionale che caratterizza la scrittura moderna dei numeri.

Quali sono le caratteristiche di un buon sistema di numerazione?

- compattezza,
- facilità di calcolo,
- facilità di memorizzazione dei simboli,
- possibilità di trattare numeri arbitrariamente grandi,
- generalizzazione a numeri non interi, …

Sistemi di numerazione additivi

Fig. Alcuni sistemi di numerazione antichi.

Probabilmente il primo sistema di numerazione è stato quello ***unario***: ad ogni unità corrispondeva un segno o un'incisione su qualche tipo di supporto.

La maggior parte delle civiltà antiche ha utilizzato come base il numero 10, legato ovviamente al numero dita delle mani. Questo perché le dita della mano hanno rappresentato sicuramente il primo strumento di calcolo usato dall'uomo.

Non mancano comunque esempi di sistemi di numerazione con base diversa. **Il più noto è il sistema sessagesimale dei babilonesi a base 60** (però non di tipo additivo).

A questo proposito, occorre osservare che ancora oggi **conserviamo traccia di questo sistema nella misurazione del tempo** (cioè, per i minuti e per secondi) e nella misurazione degli angoli (frazioni di grado).

I primi sistemi di numerazione furono per lo più *di tipo additivo* fondati sull'uso di una base numerica. In questi sistemi, ad ogni simbolo di un dato tipo è associato un valore numerico prefissato, e il sistema si dice additivo perché il valore complessivo del numero rappresentato si ottiene sommando i valori numerici dei singoli simboli che compongono il numero.

Ad esempio, nella **numerazione romana antica**, il numero

XXXVII

viene interpretato sommando:

10 + 10 + 10 + 5 + 2 = 37.

In un sistema additivo, il valore di un numero non ha niente a che vedere con la posizione dei simboli che si trovano nella sequenza che rappresenta il numero.

In generale, **i sistemi additivi consentono una facile esecuzione delle operazioni di addizione e sottrazione, ma le altre operazioni sono difficili**. In passato, queste operazioni venivano svolte con metodi diversi da quelli che noi oggi utilizziamo.

Il sistema di numerazione egiziano

Fig. Egyptian Numerals.

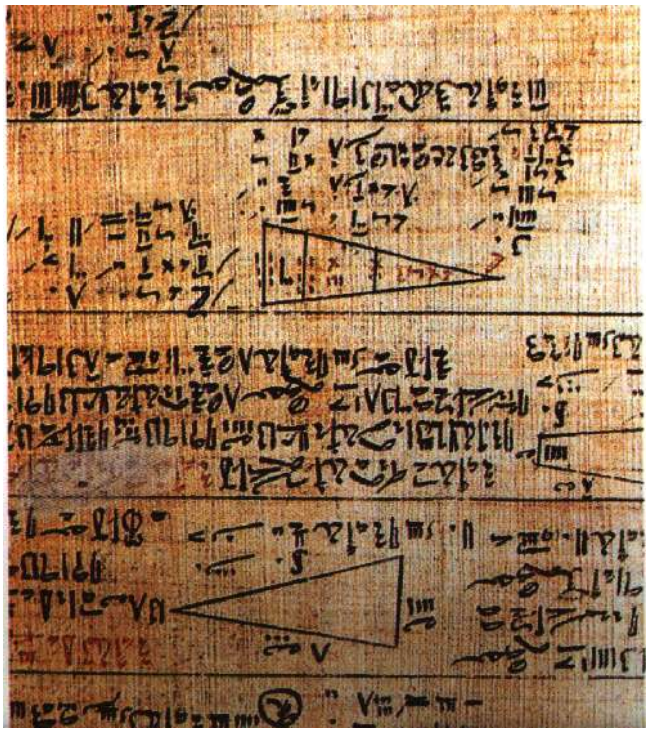


Fig. Frammento del papiro di Ahmes, circa 1600-1900 a.C.

Gli egiziani utilizzavano un sistema di scrittura basato sull'uso dei geroglifici che risale ad oltre 3000 anni prima di Cristo. Il sistema di numerazione egiziano impiegava dieci simboli base:

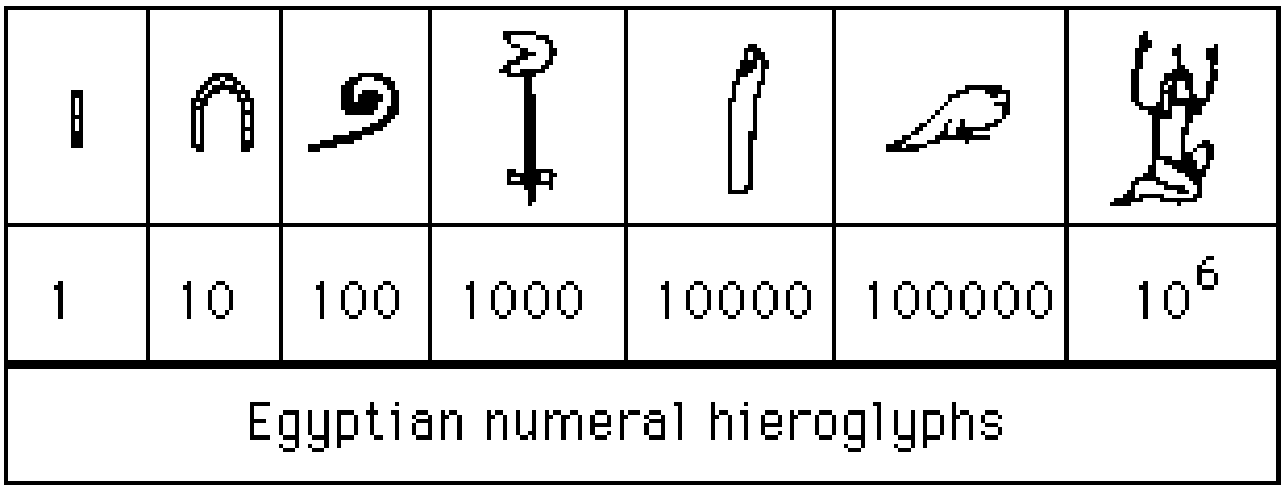


Fig. Here are the numeral hieroglyphs.

Il sistema era di tipo additivo. I numeri venivano scritti semplicemente giustapponendo i simboli e il numero rappresentato era dato dalla somma dei numeri corrispondenti a ciascun simbolo:

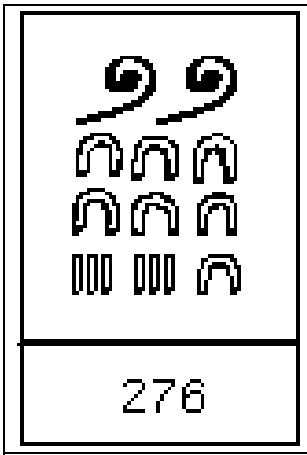


Fig. 276 in hieroglyphs.

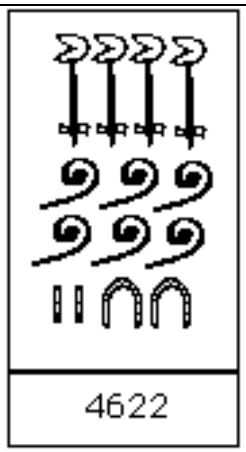
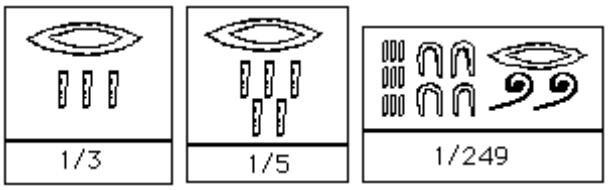


Fig. 4622 in hieroglyphs.

Le frazioni venivano scritte come somma di frazioni unitarie, cioè con il numeratore uguale a uno (tranne per le frazioni $^2/_3$ e $^3/_4$). Alcuni esempi sono illustrati qui di seguito:



Nel corso dei millenni, il sistema di numerazione egiziano è cambiato. Ad esempio, la **scrittura ieratica** permetteva di scrivere i numeri in una forma più compatta:

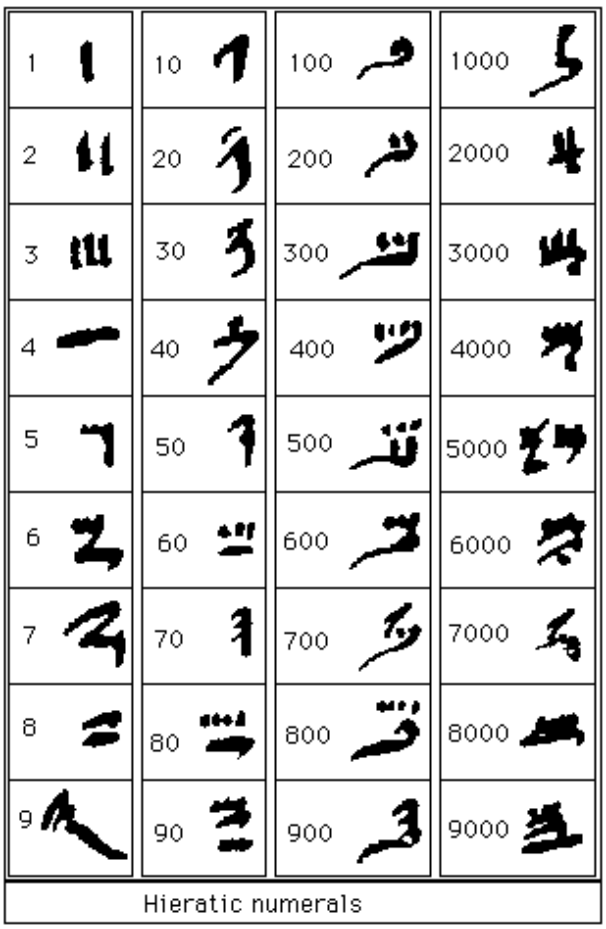


Fig. Here are versions of the hieratic numerals.

La moltiplicazione degli antichi egizi

Nell'antico Egitto le **operazioni di moltiplicazione e divisione** venivano svolte secondo una tecnica diversa da quella attuale. **Entrambe le operazioni si basavano sull'operazione di duplicazione (cioè di raddoppiamento)**.

Si supponga di dover moltiplicare 41 per 59 utilizzando la tecnica dei raddoppiamenti. Si costruisce preliminarmente una tabella con i prodotti di 59 per le potenze successive di 2. Si procede fino alla potenza di 2 immediatamente più piccola di 41 (ossia, fino a 32).

41	**59**	
1	**59**	✓
2	**118**	
4	**236**	
8	**472**	✓
16	**944**	
32	**1888**	✓

A questo punto, è necessario scomporre 41 nella somma di potenze di 2 elencate nella prima colonna:

41 = 32 + 8 +1.

Sfruttando la proprietà distributiva possiamo scrivere:

$$41 \cdot 59 = (1 + 8 + 32) \cdot 59 =$$
$$= 1 \cdot 59 + 8 \cdot 59 + 32 \cdot 59 =$$
$$= 59 + 472 + 1888 =$$
$$= 2419$$

Sistemi di numerazione posizionale

Il sistema di numerazione babilonese

Il sistema di **numerazione babilonese aveva base 60 ed era un sistema posizionale**.

Il fatto che la base del sistema fosse 60, **non deve far concludere che essi utilizzassero 60 cifre** in stretta analogia con il nostro attuale sistema. **Le "cifre" del sistema sessagesimale (da 1 a 59) erano struttura-te** e in particolare, **venivano scritte mediante un meccanismo additivo** basato sull'uso di soli due simboli, uno per le unità e uno per le decine, come si può vedere nella seguente figura.

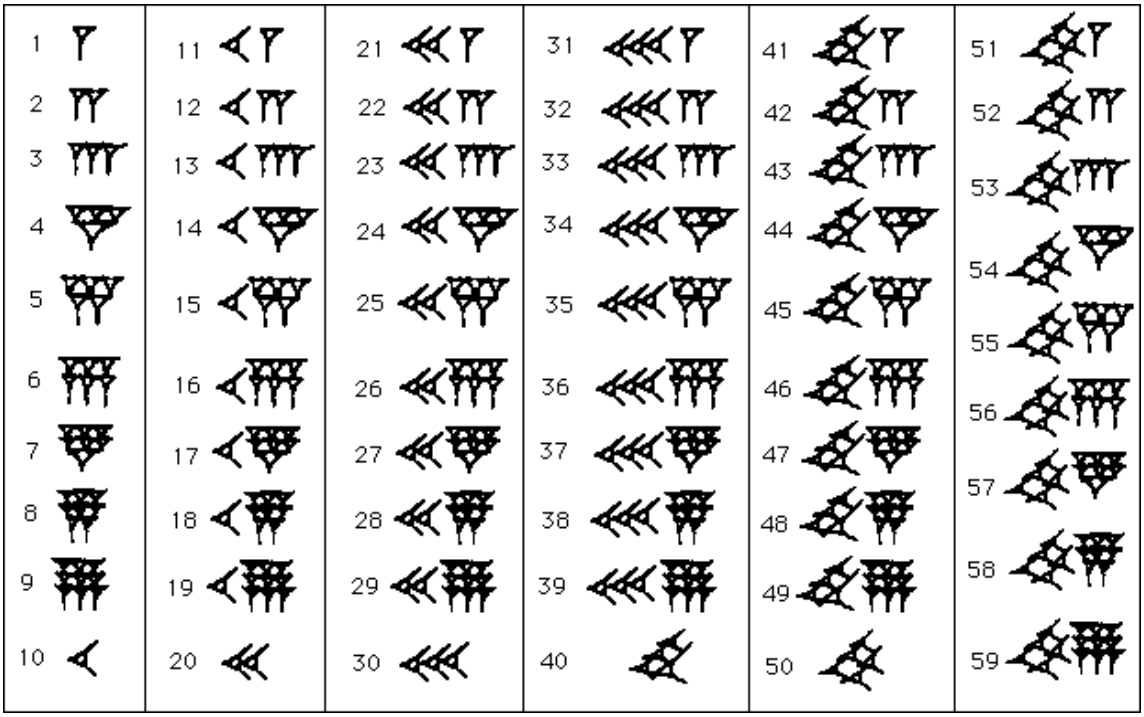
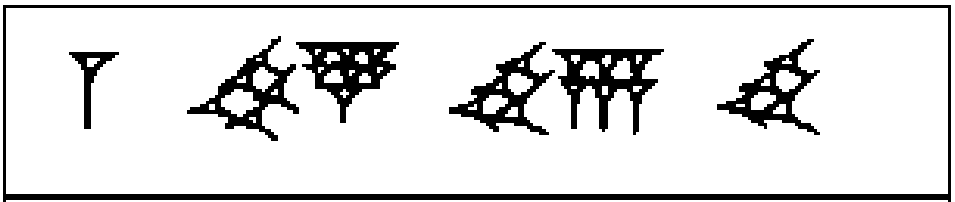


Fig. Here are the 59 symbols built from these two symbols



1,57,46,40 = 424000

Fig. Here is 1,57,46,40 in Babylonian numerals

Purtroppo, **i Babilonesi non avevano un simbolo per indicare lo zero** e ciò poteva creare ambiguità nell'interpretazione dei numeri: il numero sessagesimale (1,1), poteva essere confuso con il numero sessagesimale (0,2). Al posto dello zero, i Babilonesi potevano lasciare un certo spazio tra le cifre dei numeri, ma ciò creava comunque problemi per distinguere numeri come 1, o 60, o 3600.

Se I babilonesi avessero introdotto anche lo zero, avrebbero anticipato il moderno sistema di numerazione posizionale.

L’india e il sistema di numerazione posizionale

Le **civiltà babilonese e cinese** furono capaci di anticipare l’idea del sistema posizionale, ma **non riuscirono a comprendere il ruolo e l’importanza dello zero**, per cui non riuscirono di fatto a sviluppare un sistema veramente efficace e funzionale.

La civiltà a cui va il merito di aver elaborato un sistema posizionale veramente completo è quella indiana attorno al V o VI d.C.

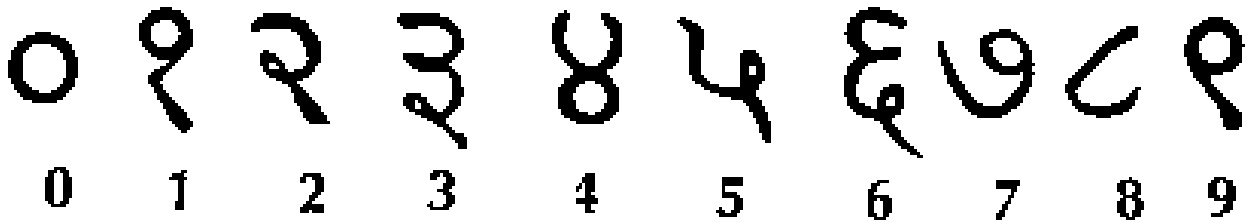


Fig. Sanskrit numerals.

Fu probabilmente l'abaco a suggerire agli indiani il sistema posizionale e probabilmente anche l'uso dello zero. Volendo trascrivere il contenuto di ciascuna riga dell'abaco, come indicare le righe vuote? Per indicare tali righe, gli indiani pensarono di usare un puntino; a poco a poco questo puntino divenne un piccolo ovale così come noi oggi usiamo lo zero.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Gupta numerals around 4th century A.D.								

Cosa importante da sottolineare è che **per la prima volta lo zero**, che in qualche era già comparso qua e là in civiltà precedenti, **venne considerato un vero e proprio numero** e non soltanto un segno di mancanza di cifre nella scrittura dei numeri: se è vero che i diversi ingredienti del sistema posizionale erano già stati usati in precedenza presso varie civiltà, furono gli indiani a combinare il tutto facendone un sistema veramente funzionale!

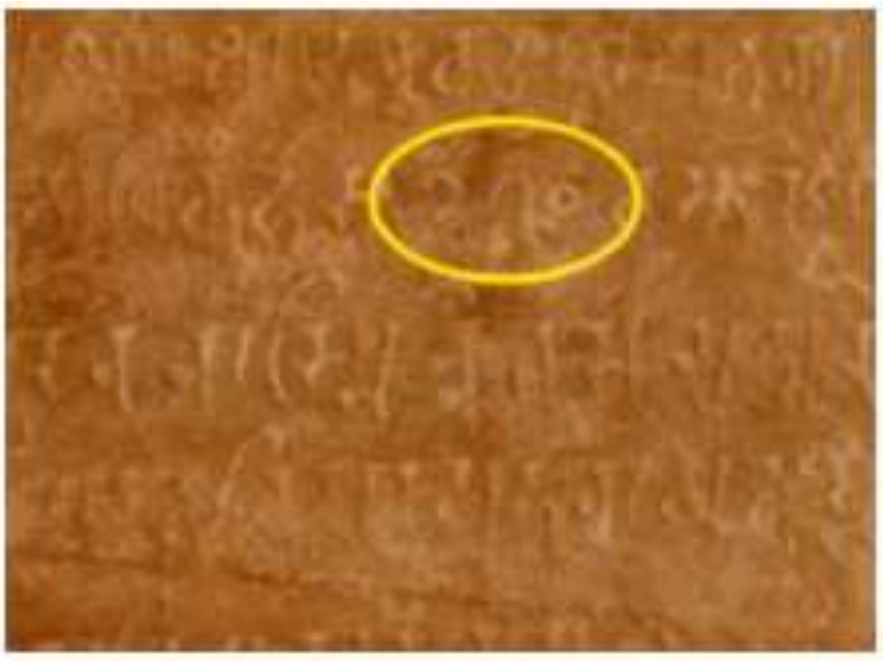
Il sistema indiano grazie all'uso dello zero (per il quale introdussero la parola **sunya**, che significa '**posto vuoto**') e di altre nove cifre divenne il sistema di gran lunga più semplice ed efficace di quelli elaborati da altre civiltà.

Il sistema di numerazione indiano è un sistema di tipo posizionale in quanto il valore numerico associato ad ogni cifra varia secondo la posizione che essa occupa nella scrittura del numero. **Gli indiani furono inoltre capaci di sfruttare i vantaggi del sistema posizionale nell'esecuzione delle operazioni**, cosa che invece non era stata compresa dai Babilonesi e dai Cinesi.

Nel corso dei secoli la forma delle cifre è cambiata più volte. I primi simboli usati per le cifre sono quelli di tipo bramini risalenti al IV d.C., ritrovati su monete di Poona, Bombay, e Uttar Pradesh. L'origine di questi simboli non è nota.

Il più antico documento datato in cui compare il sistema posizionale indiano è un documento di tipo legale che contiene la data del 594 d.C., ma alcuni studiosi ritengono che questa data sia stata aggiunta successivamente.

Per quanto riguarda l'**uso dello zero** il primo documento datato noto che testimonia direttamente l'uso dello zero risale al 876 d.C.; si tratta di un'iscrizione su lapide relativa alla città indiana Gwalior, vicino a Delhi:



LINK

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Indian_numerals.html

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Zero.html

I numeri: dall'India all'Europa attraverso gli Arabi

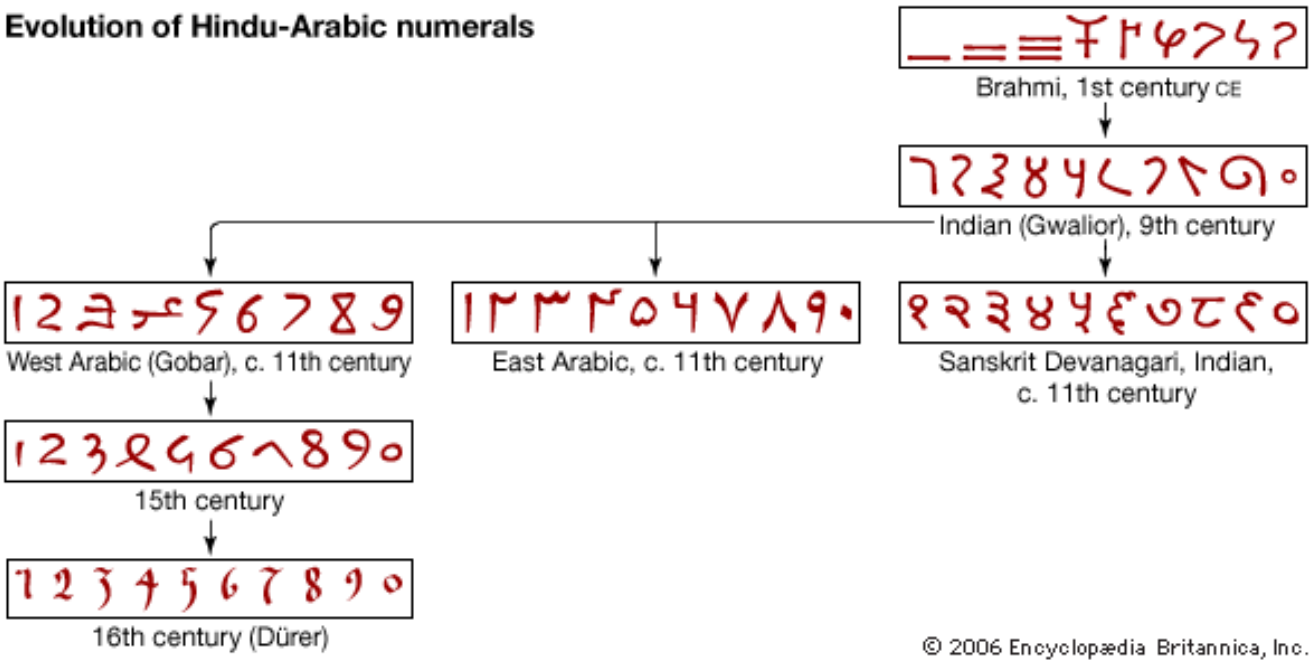


Fig. Evoluzione delle cifre arabe, secondo Karl Menninger.

… L’Islam

I contatti tra il mondo arabo e quello indiano portarono ben presto la diffusione del sistema di numerazione indiano nella cultura araba. Abbiamo un documento arabo del 662 d.C. che cita i sistema indiano.

Tra i personaggi arabi che si ritiene abbiano contribuito a diffondere il sistema posizionale c’è lo stesso **Al-Khwarizmi** (circa 780-850), che abbiamo incontrato parlando proprio dell’origine del termine “algoritmo”.

Attorno all’820 egli scrisse un testo (**Algoritmi de numero Indorum**) dedicato al sistema di numerazione posizionale. Il testo evidenzia il ruolo importante dello zero, caratterizzante i sistemi di numerazione posizionale. Oltre alle dieci cifre, un po’ diverse per forma da quelle odierne, sono presenti i metodi per eseguire le operazioni aritmetiche, compreso il calcolo della radice quadrata.

Gli arabi rielaborarono i metodi indiani per eseguire le operazioni introducendo varianti comunque concettualmente equivalenti a quelli indiani. In particolare **il matematico al-Uqlidisi (circa 920 – 980) contribuì a trasformare le tecniche di calcolo indiane ideate per lavagne a sabbia nei metodi adatti a carta e penna**. Infatti, fino ad allora in India e nel mondo arabo era pratica fare i calcoli aritmetici scrivendo sulla sabbia o sulla polvere, cancellando i passaggi intermedi mentre si procedeva.

… L’Europa

Bisogna aspettare ancora circa tre secoli perché il sistema di numerazione indo-arabo giunga anche in Europa, dove era in uso essenzialmente il metodo di numerazione romano.

Il primo documento europeo contenente le cifre arabe risale al 976 d.C., il ***Codex Vigilanus***.

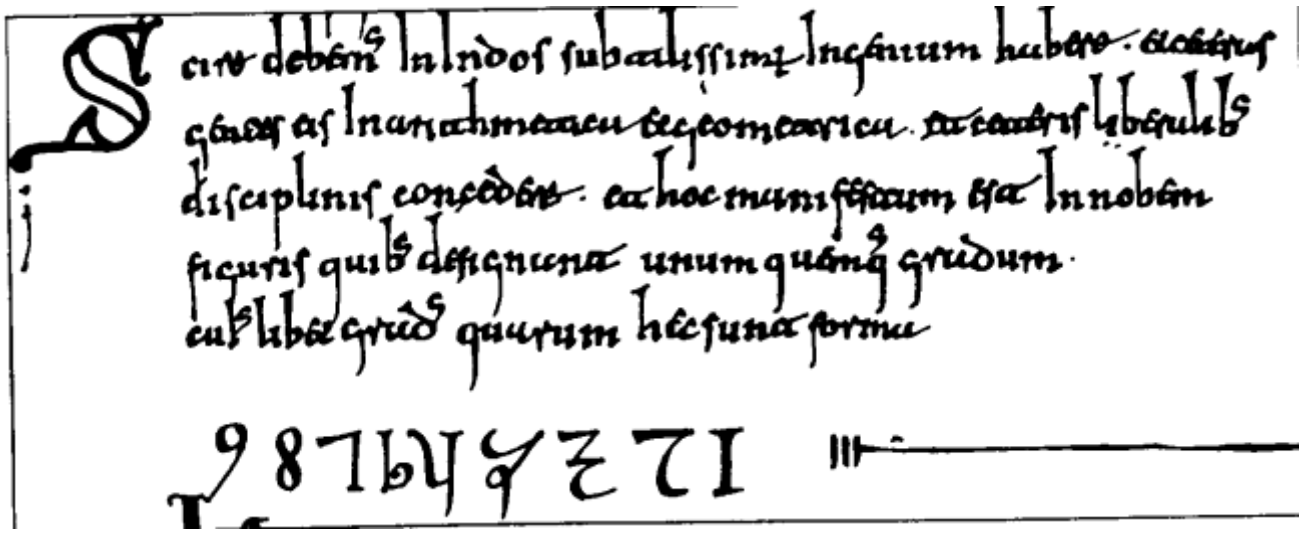


Fig. Codex Vigilanus: la più antica indicazione trovata in Europa delle nostre cifre decimali (976 d.C.).

Dal momento che Europa medioevale acquisì il sistema di numerazione non direttamente dagli indiani, ma dagli arabi, nella cultura occidentale le cifre numeriche vengono dette anche ***cifre arabe***. Per molto tempo i numeri indiani furono comunque usati a fianco dei numeri romani.

La diffusione in Europa avvenne prevalentemente per opera di matematici legati ad ambienti culturali diversi: quello delle scuole ecclesiastiche e delle università e quello dei mercanti.

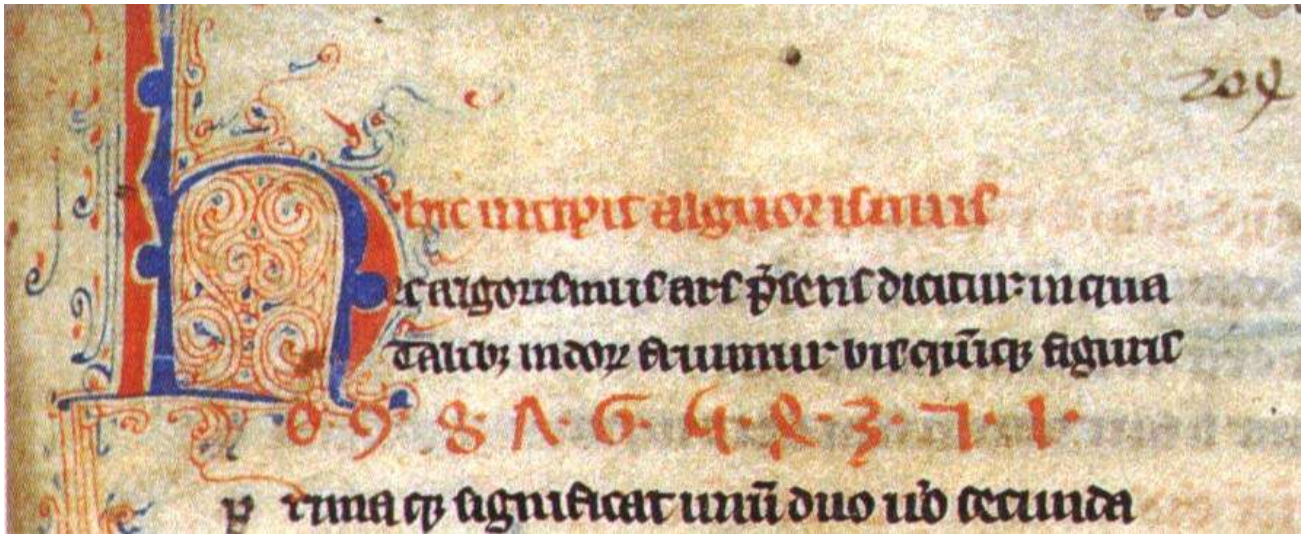


Fig. Incipit del Carmen de Algoritmo, poema latino del XIII sec. di Francois Alexandre de Villedieu.

Tra i personaggi che maggiormente contribuirono ad introdurre il nuovo sistema di numerazione decimale in Europa attorno al XIII sec. d.C. va sicuramente menzionato **Leonardo Pisano (1170-1250), detto Fibonacci con il suo *Liber Abaci* (1202)**.

Fig. Leonardo Pisano, detto Fibonacci.

Fig. Pagina iniziale del Liber abaci.

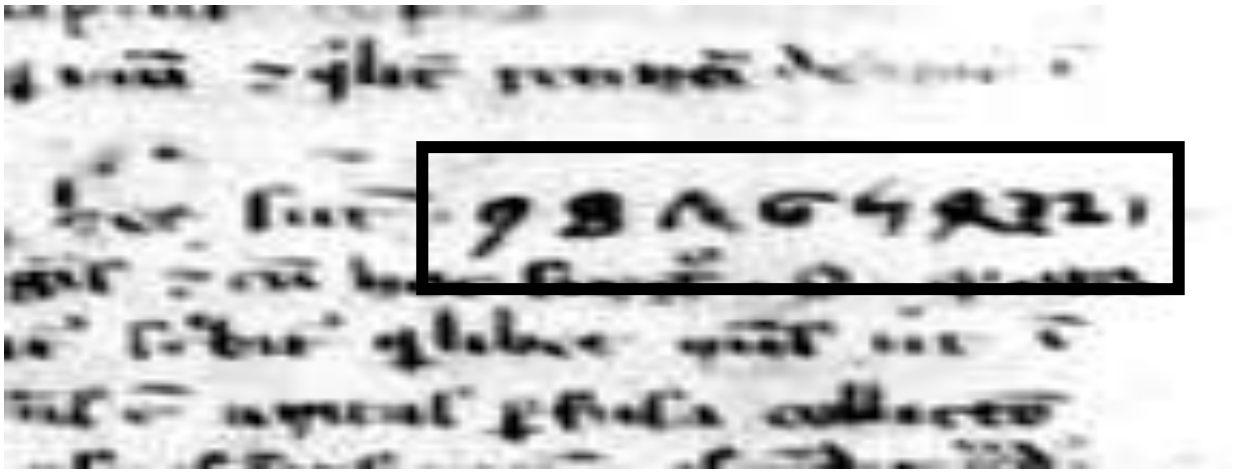


Fig. Dettaglio delle cifre arabe descritte nel Liber abaci.

La numerazione posizionale comportò non solo l'introduzione di un nuovo sistema di scrittura dei numeri, ma determinò parallelamente l'introduzione delle regole di calcolo che noi oggi utilizziamo.

2594 ×
27 =

18158
5188

70038

MMDXCIIII × XXVII = ?

Fig. La moltiplicazione nel sistema decimale e nel sistema romano presentano una notevole differenza come difficoltà.

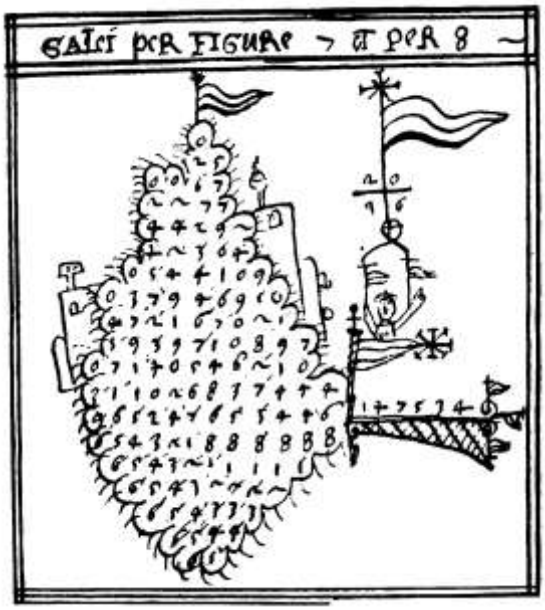


Fig. La divisione secondo il metodo "per galera", derivata da quella con l'abaco (utilizzata fino a secolo XV).

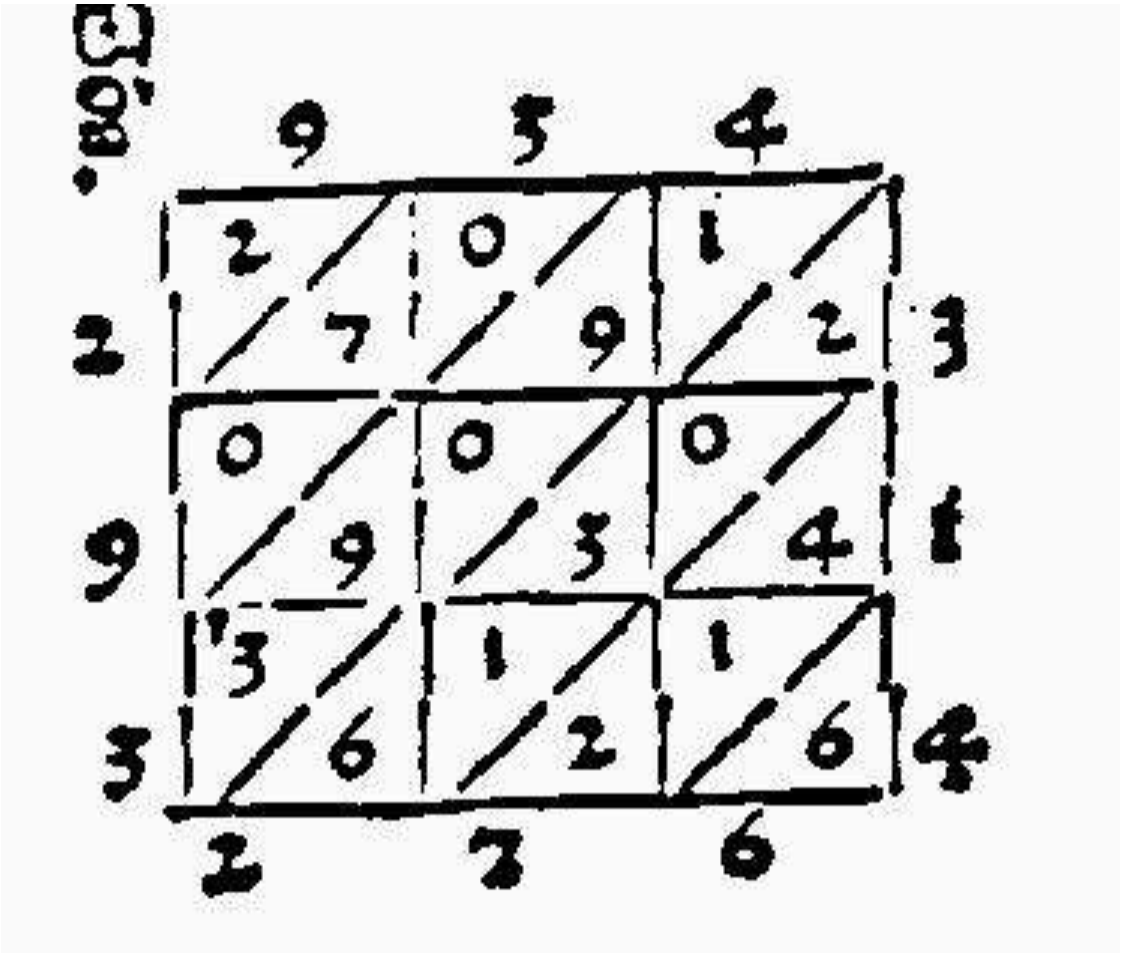
Gli algoritmi della moltiplicazione posizionale in Europa

L'introduzione del sistema decimale si può considerare un’autentica rivoluzione. Noi oggi siamo così abituati a questo sistema da non renderci conto della sua immensa importanza nel facilitare le operazioni.

La moltiplicazione nel sistema decimale posizionale è l'operazione per la quale troviamo la maggior varietà di metodi, che anche graficamente assumono aspetti molto diversi tra loro e ai quali gli algoristi assegnarono nomi fantasiosi.

Fibonacci illustra nel *Liber abaci* vari metodi per eseguire le operazioni aritmetiche.

Un algoritmo che riduce al minimo le possibilità di errori perché i possibili riporti si hanno solo in sede di addizioni che seguono una serie di semplici moltiplicazioni a una cifra è quello detto in Italia come *a* ***gelosia***, oppure *a caselle* o *a reticolo* (già noto comunque agli indiani e agli arabi). Ecco uno schema di moltiplicazione a gelosia, tratto dall'***Aritmetica di Treviso (1478)***: **934 x 314**



Un metodo di moltiplicazione molto rapido è **il metodo per crocetta** presentato nel testo *Scala grimaldelli* (libro I) del 1560 di Francesco Feliciano, matematico del XVI sec.[1]

Moltiplicar per Crocetta, o Casella, si puol moltiplicar, e far di quante figure tu vorrai, ma bisogna tenere il capo a bottega per gli incrociamenti che gli vanno, e per questa causa pochi lo adopera da due figure in suso. E fassi in questo modo, pono che habbi a moltiplicare 86 fia 59; acconcia le tue figure come vedi qui da canto, e comincia dalla prima figura da man destra, e di' 6 fia 9 fa 54 e metti 4 e tieni 5, e poi di' 8 fia 9 fa 72 e serva, poi di' 5 fia 6 in croce fa 30, hor summa 5 che tenesti e 72 che servasti con 30, fa 107, e metti 7 e tieni 10, e poi di' 5 fia 8 fa 40, e 10 che tenesti fa 50, metti 50 in bina con 74, starà così 5074 e tanto fa 59 fia 86, e così puoi far tutte le simili, e la prova farai come alle antedette, fatta.

[1] Bottazzini, U., Freguglia, P., Toti Rigatelli, L., Fonti per la storia della matematica, Sansoni, pag 24.

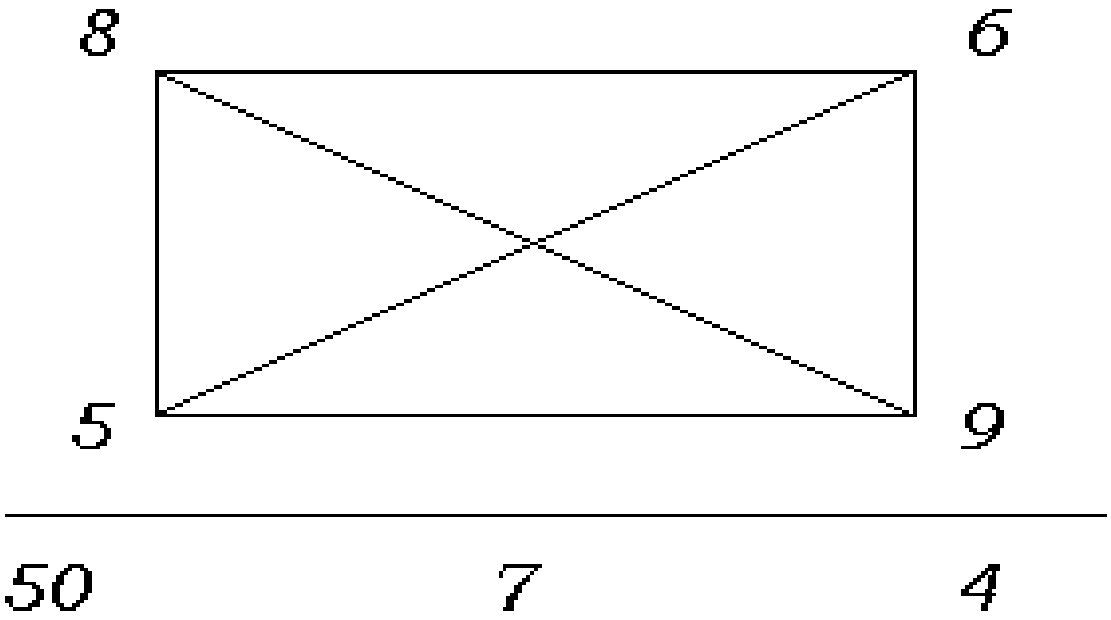
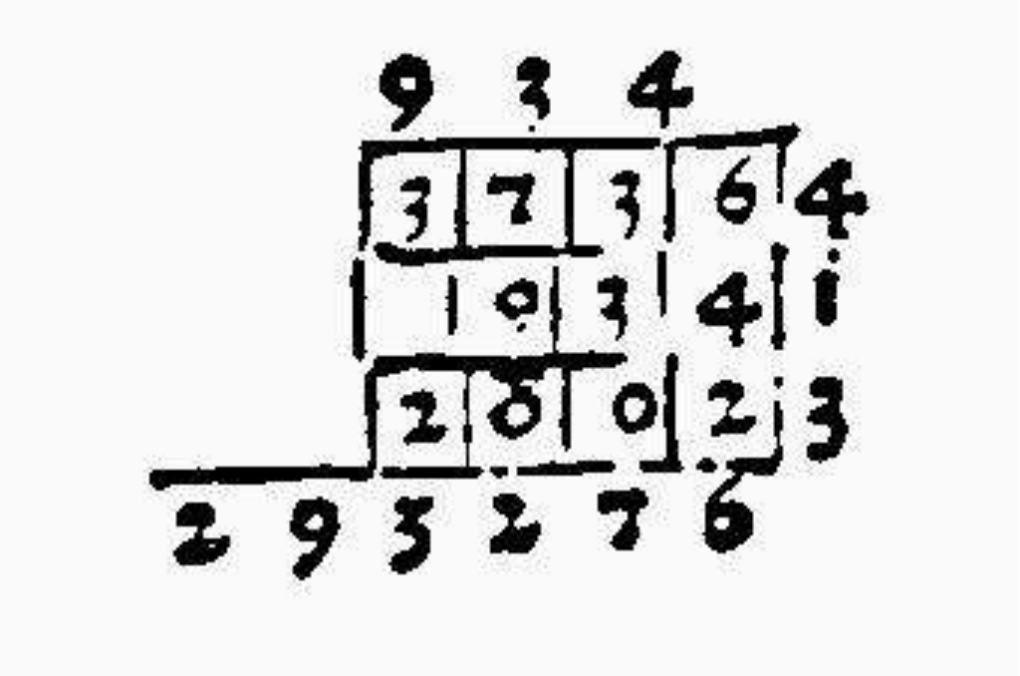


Fig. Il metodo di moltiplicazione a crocetta.

Il ***quadrilatero*** era un altro metodo molto comune, esposto anche questo nel *Liber abaci*. Questo è lo schema relativo alla stessa moltiplicazione precedente, tratto sempre dall'***Aritmetica di Treviso***:



L'attuale metodo veniva detto in Toscana *per* ***biricucolo*** e lo stesso metodo veniva invece indicato come ***per schacchiere*** a Venezia e ***per organetto*** a Verona.

Nel 1478 esce ***Larte de labbacho*** (noto anche come ***Aritmetica di Treviso***), il primo manuale di aritmetica stampato (di autore anonimo) orientato alla matematica necessaria per le arti mercantili e nel 1494 esce la ***Summa de aritmetica, geometria, proporzioni et proporzionalità***, che racchiude tutto il sapere matematico elaborato nel periodo buio del medioevo. Questi testi e altri segnano di fatto l'avvento definito del sistema posizionale decimale.

LINK

http://www2.math.unifi.it/~archimede/archimede/note_storia/numeri/numeri1/node8.html#moltiplicazione

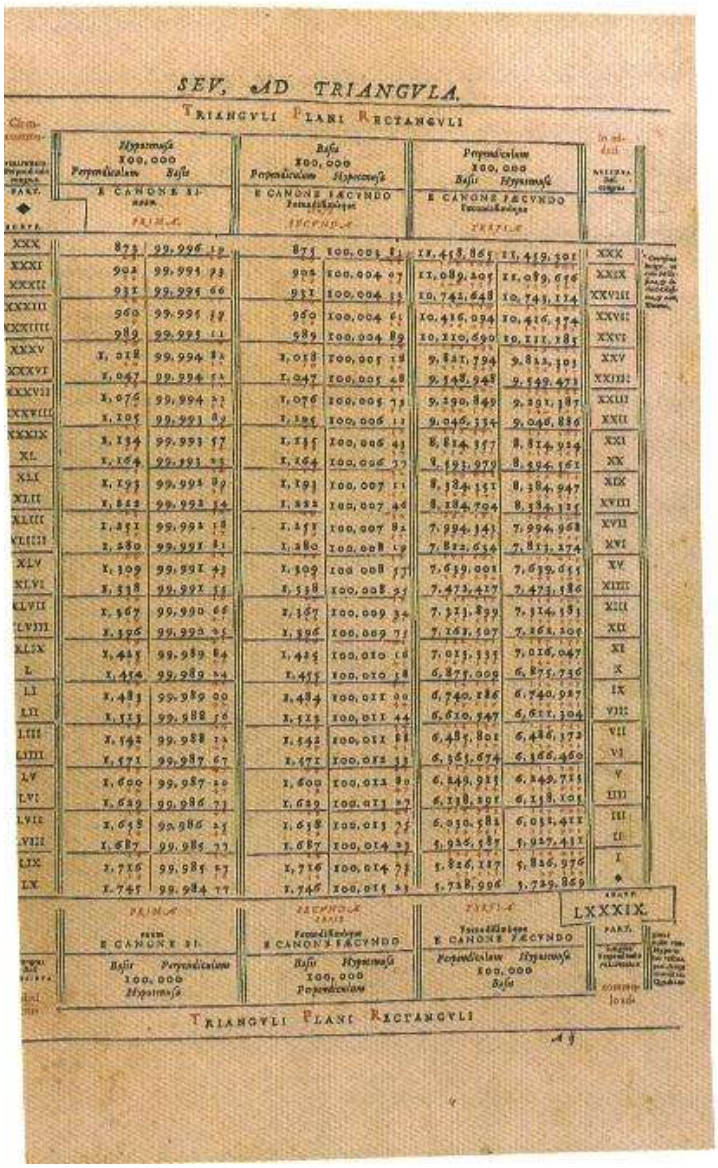
http://www.dm.uniba.it/ipertesto/indice.doc

http://www2.math.unifi.it/~archimede/archimede/fibonacci/immagini_mostra/virtuale.php

Dalle frazioni decimali ai numeri decimali con la virgola

Contrariamente a quanto si può pensare, l'uso della virgola nella rappresentazione dei numeri non interi non è contemporaneo all'introduzione del sistema posizionale decimale.

Fibonacci, che tanto contribuì all'introduzione del sistema decimale in Europa, non si rese conto della possibilità di descrivere quantità frazionarie mediante l'uso della virgola e di ulteriori cifre decimali. L’uso sistematico della virgola fu invece introdotto solo tre secoli più tardi.


SEV, AD TRIANGVLA.

TRIANGVLI PLANI RECTANGVLI

LXXXIX.

TRIANGVLI PLANI RECTANGVLI

Fig. ???Una pagina del *Canon mathematicus* di Viète con le frazioni decimali, 1571. (da http://euler.us.es/~libros/aritmetica.html)

L'uso della virgola viene anticipato dall'uso delle ***frazioni decimali***, in contrapposizione a quelle sessagesimali, e si riscontra nei testi di alcuni matematici del 1500, come **Stevino** e **Viète**. Il loro uso era stato comunque anticipato cinque secoli prima dal matematico arabo **Abu'l Hasan Ahmad ibn Ibrahim al-Uqlidisi** (c. 920-c. 980).

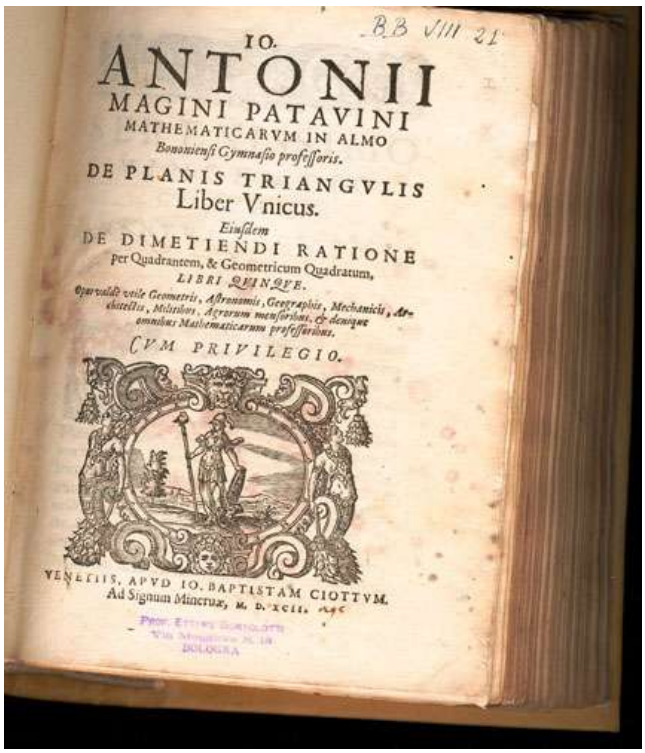


Fig. Frontespizio dell'opera *De planis triangulis* di Magini. (da http://www.dm.unibo.it/libradm/document/500ant/500.html#magini)

Carl Boyer attribuisce il primo uso della virgola al matematico italiano **Giovanni Antonio Magini** (1555-1617), un astronomo amico di Keplero e concorrente con Galileo alla cattedra di matematica a Bologna. Nel suo libro *De planis triangulis* del 1592 sono presenti i primi numeri con la virgola.

La virgola (nel continente europeo) o il punto decimale (nei paesi anglosassoni) diventarono di uso comune soltanto venti anni più tardi, quando le tavole logaritmiche, inventate dal matematico scozzese Nepero, furono introdotte per velocizzare i calcoli matematici.

La rappresentazione mediante la virgola permise di rendere omogenei gli algoritmi usati con i numeri interi con quelli usati per gestire la parte non intera.

```
     4253 ×
     7689 =
------------------
     38277
    34024
   25518
  29771
------------------
  32701317
------------------------------------------
     42,53 ×
     7,689 =
--------------------
     38277
    34024
   25518
  29771
---------------------
  327,01317
```

Fig. La virgola facilita le operazioni con i numeri non interi. La moltiplicazione di 42,53 e 7,689 non è essenzialmente più difficile della moltiplicazione dei numeri interi 4253 e 7689, poiché, a parte la gestione della virgola, vengono utilizzati i medesimi procedimenti di calcolo.

Questa notazione si dimostrò poi di particolare importanza anche per i settori scientifici e tecnologici che proprio in quegli anni stavano movendo i primi passi.

LINK

http://members.aol.com/jeff570/fractions.html

http://www.iesmurgi.org/matematicas/materiales/numeros/node7.html

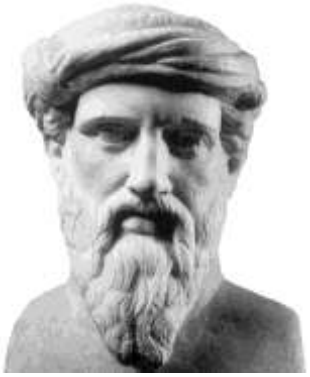
http://members.aol.com/jeff570/fractions.html

http://www.maths.uwa.edu.au/~schultz/3M3/L9AlUqlidisi.html

http://www.maths.uwa.edu.au/~schultz/3M3/L11Stevin.html

I limiti della macchina aritmetica: grandezze incommensurabili

Che **cosa si può rappresentare** con i sistemi di numerazione visti e **cosa si può calcolare** con le quattro operazioni?



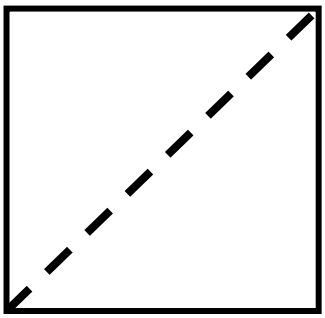
Nell'antica Grecia, il sistema della quattro operazioni con i numeri razionali (assoluti) ad essi legato appariva ai **Pitagorici** sufficiente a trattare ogni questione matematica pratica e teorica.

Sappiamo che nella **Scuola Pitagorica** i numeri non solo costituirono l'oggetto delle prime teorie matematiche, ma, nell'ambito delle ricerche filosofiche sul problema dell'***archè*** (ossia del principio di tutte le cose), rappresentarono di fatto la base di una teoria con cui interpretare il mondo. "***Tutto è numero***" è il famoso motto che sintetizza lo spirito filosofico della Scuola Pitagorica.

I Pitagorici credevano che tutte le relazioni caratterizzanti il mondo reale potessero essere interpretate in termini di relazioni tra numeri e in un certo senso possiamo dire che la loro teoria fu il primo tentativo per cercare un'interpretazione su base razionale del cosmo.

Incommensurabilità della diagonale

La scoperta delle grandezze incommensurabili mise in discussione la possibilità di “misurare” tutte le grandezze mediante i numeri razionali allora noti.



Ad esempio, nessun numero razionale p/q permette di “misurare” la diagonale del quadrato.

In termini computazionali: le quattro operazioni applicate ai numeri razionali non permettono di calcolare la diagonale del quadrato.

Alcuni storici ritengono che la scoperta dell’incommensurabilità della diagonale abbia determinato una crisi profonda nei confronti dei sistemi numerici: i matematici greci cominciano a fondare la matematica su un sistema geometrico distinguendo nettamente numeri e grandezze geometriche.

Euclide, negli Elementi, distingue i numeri (trattati nei libri VII, VIII e IX, dalle grandezze (trattate nel V e X libro).

In un certo senso, la riga e il compasso sembravano ai Greci più potenti delle quattro operazioni aritmetiche.

3 La macchina geometrica

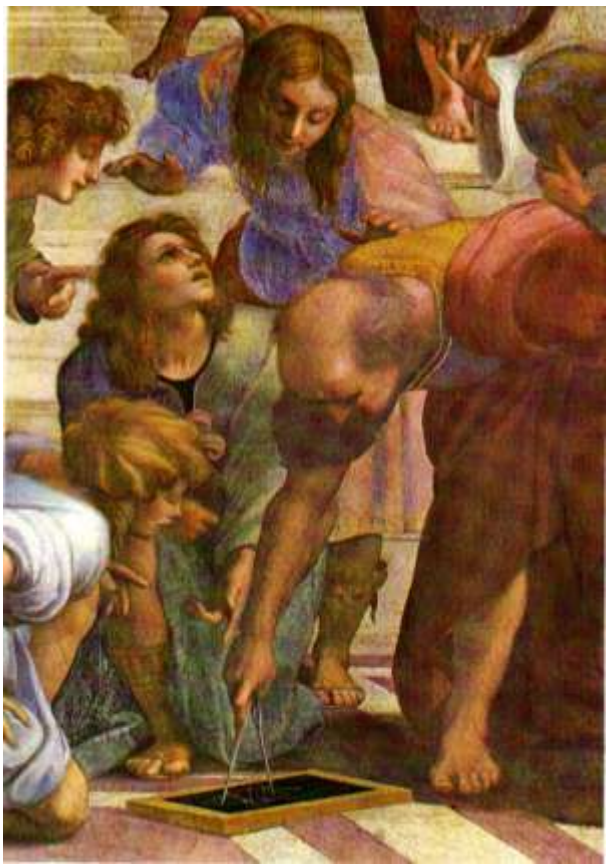


Fig. Euclide, particolare della Scuola di Atene di Raffaello.

Sebbene quando si parla di algoritmi si tenda a pensare a procedure per manipolare numeri (in forma numerica o in forma simbolica), nella storia degli algoritmi hanno avuto un ruolo importante le costruzioni geometriche.

Molte delle costruzioni geometriche possono essere interpretate anche in senso algebrico. Indirettamente, gli antichi Greci erano in grado di risolvere equazioni di 1° e 2° grado mediante opportune costruzioni geometriche.

I Greci e le costruzioni con riga e compasso

Fig. Due pagine del testo di Euclide, in una delle versioni più antiche (Biblioteca Vaticana)

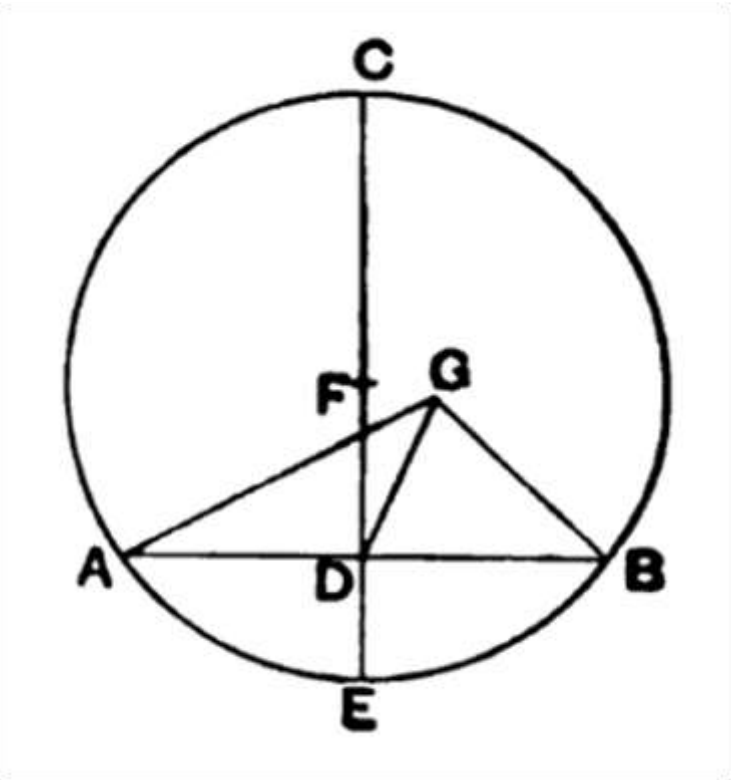
Un primo esempio di costruzione geometrica è quella che permette di determinare il centro di un cerchio (Libro III, prop. 1) a partire dalla circonferenza:

Proposizione 1. Trovare il centro di un cerchio dato.

Sia ABC il cerchio dato; si deve dunque trovare il centro del cerchio ABC.

Si tracci in esso a caso una retta [cioè una corda] AB e la si divida per metà nel punto D [prop. I, 10], da D si innalzi DC perpendicolare ad AB [prop. I, 11], si prolunghi CD oltre D sino ad E, e si divida CE

per metà in F (I, 10); dico che F è il centro del cerchio ABC.



Una teoria matematica per la macchina geometrica

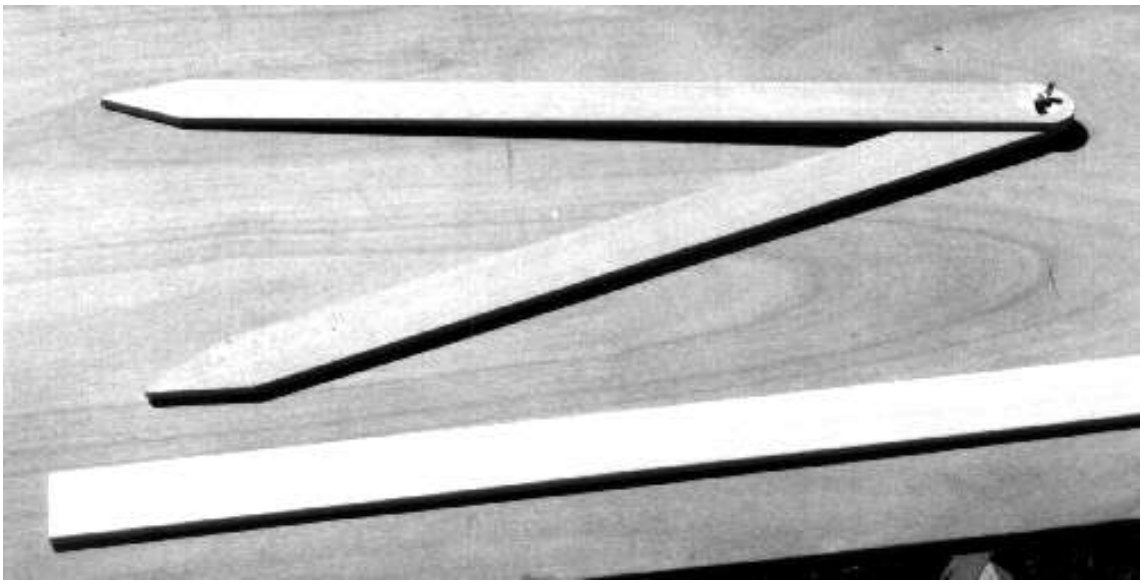
Inizialmente le costruzioni geometriche erano sicuramente legate alla pratica di strumenti concreti, ma piano piano deve essere avvenuto un cambiamento fondamentale che determinò un profondo mutamento come era già accaduto in precedenza con il passaggio dai sassolini dell'abaco all'aritmetica astratta dei numeri:

> **la macchina geometrica greca passò dal concreto** (strumenti da disegno) **all'astratto** (rette, circonferenze, ecc.), anche se è difficile descrivere questo cambiamento perché mancano fonti testuali che documentano questa transizione.

In tale contesto, due domande importanti si pongono immediatamente:

- **quali "strumenti geometrici" possono essere impiegati per tracciare le figure**: in altre parole, quali sono le operazioni di base che possiamo utilizzare in un algoritmo geometrico?
- **come possono essere matematizzati questi strumenti geometrici**, cioè come possono essere rigorosamente descritti in modo da essere matematicamente trattabili?

È probabile che **nella prima fase** della geometria greca i problemi di costruzioni venissero risolti utilizzando **vari strumenti geometrici** e gradualmente si sia chiarito la questione degli strumenti da utilizzare.



Secondo molti storici **la conclusione a cui pervennero i matematici greci fu quella di privilegiare la riga e il compasso** anche se la restrizione al solo uso di riga e compasso non è stabilita così chiaramente come lascia intendere la storiografia più tradizionale.

Un problema geometrico è quindi considerato risolto quando è possibile dare un'opportuna costruzione mediante questi due soli strumenti. In particolare, ogni algoritmo geometrico con riga e compasso parte da alcuni dati iniziali, che sono gli oggetti geometrici dati di partenza (rette, segmenti, circonferenze, ecc.), e procede combinando le seguenti cinque operazioni elementari:

1. disegno di una retta con la riga (libera, passante per un punto, o per due punti,
2. disegno di una circonferenza con il compasso (libera, di dato centro, o di dato centro e di dato raggio),
3. intersezione di due rette,
4. intersezione di una circonferenza con una retta,
5. intersezione di due circonferenze.

Ognuna di queste operazioni (ripetuta anche più volte) consente di individuare nuovi punti, rette, segmenti e circonferenze necessari per realizzare la figura desiderata.

Le ragioni per la scelta di questi due strumenti rispetto ad altri possibili non sono del tutto chiare e varie ipotesi sono state avanzate:

- ***metafisico-estetico****,* perché la retta e il cerchio nella loro semplicità corrispondono a criteri di perfezione e armonia tipici del mondo greco,
- ***assiomatico***, perché il comportamento della retta e del cerchio possono essere descritti con una teoria geometrica (assiomatizzazione) abbastanza semplice, e
- ***esistenziale***, perché le procedure costruttive costituiscono una garanzia dell'esistenza stessa delle figure trattate nei teoremi.

Naturalmente questa scelta non significa che nella matematica greca non siano presenti esempi in cui si fa ricorso ad altri strumenti meccanici, ma sembra che (a partire da un certo momento) i matematici greci fossero coscienti di ricorrere a strumenti che violavano la restrizione a riga e compasso.

La seconda questione, relativa al come furono matematizzati questi (due) strumenti geometrici è intrinsecamente legata al processo di astrazione a cui andò progressivamente incontro la geometria, che portò ad idealizzare riga e compasso in modo che ogni segno del foglio rimandasse ad un ente geometrico ideale (punto, retta, circonferenza, ecc.) perdendo tutte le imperfezioni materiali.

Il risultato di questo processo appare già in forma compiuta nei primi libri degli *Elementi* di Euclide e fa ricorso, per la prima volta, ad un processo di assiomatizzazione:

> *Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.*
>
> *E che una retta terminata (= finita) si possa prolungare continuamente in linea retta.*
>
> *E che si possa descriver un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza (= raggio).*

I postulati euclidei esprimono chiaramente la "purezza" di questi due strumenti, come ben sottolinea Frajese[10]: "*Fatto sta che, pur fornendo le costruzioni geometriche che noi eseguiamo usando gli strumenti elementari (riga e compasso), Euclide non nomina mai gli strumenti stessi, postulando che le figure elementari costruite sorgano come per incanto*".

Nel testo euclideo troviamo due tipi di proposizioni:

- le prime rappresentano sostanzialmente **teoremi che enunciano proprietà** di vario genere delle figure (e di cui parleremo nel prossimo capitolo),
- mentre le altre rappresentano **costruzioni geometriche**, che descrivono a tutti gli effetti procedure algoritmiche per costruire con riga e compasso una qualche figura;

Euclide non considera oggetti geometrici di cui non abbia precedentemente stabilito l'esistenza con una costruzione esplicita: prima di dimostrare il teorema di Pitagora, spiega come costruire un triangolo, un quadrato e così via.

La costruibilità di un ente geometrico con riga e compasso permette di impostarne lo studio teorico, al punto che le caratteristiche geometriche dell'oggetto sono determinate dalla stessa procedura costruttiva.

Un altro requisito molto importante richiesto in tutte le costruzioni (rilevante anche dal punto di vista computazionale) è quello della ***finitezza del numero di passi***: la procedura geometrica deve avere un numero finito di passi. Di questo fatto i Greci furono consapevoli e in più punti la finitezza dei passi viene esplicitamente ribadita.

I problemi classici non risolubili con riga e compasso

Le costruzioni geometriche realizzate con riga e compasso dagli antichi matematici Greci sono numerose, ma alcuni problemi sfidarono le capacità e la creatività dei grandi geometri. Tra questi problemi quelli che passarono alla storia perché su di essi si affannarono per secoli i matematici dell'antica Grecia e moltissimi altri matematici furono tre.

- **Il problema della quadratura del cerchio**: Il problema è quello di costruire, usando solo riga e compasso, un quadrato con la stessa area di un dato cerchio.
- **Il problema della trisezione di un angolo**: Il problema consiste nel suddividere con riga e compasso un angolo qualsiasi in tre angoli congruenti.
- **Il problema della duplicazione del cubo**: Da un cubo di dato lato, costruire con riga e compasso il lato del cubo di volume doppio.

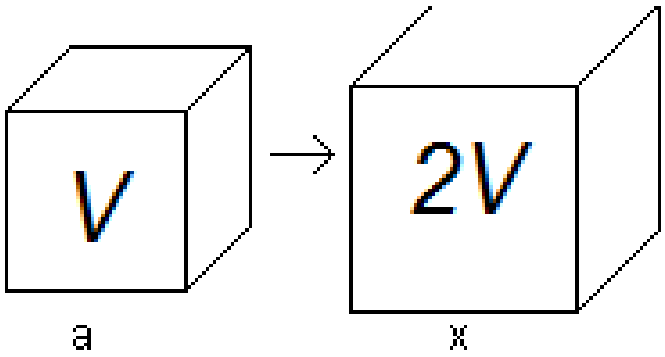


Fig. Problema della duplicazione del cubo.

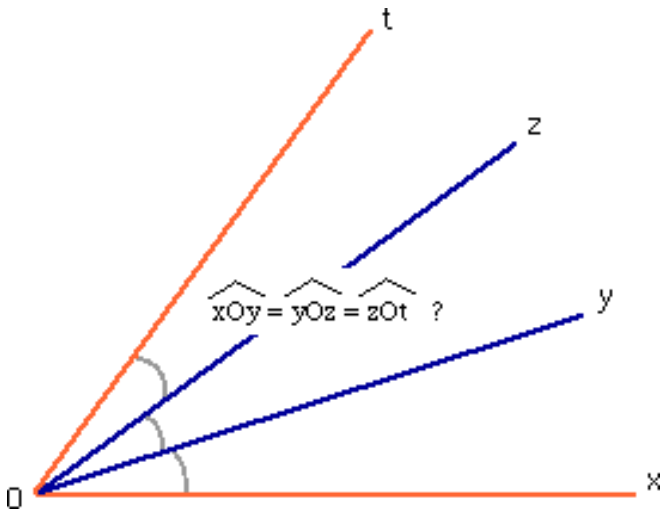


Fig. Problema della trisezione di un angolo.

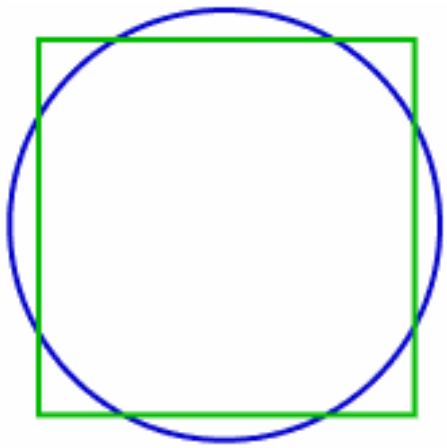


Fig. Problema della quadratura del cerchio.

I limiti della macchina geometrica

Per due millenni i migliori matematici del mondo tentarono invano di risolvere questi problemi, fino a quando nel 1800, lo studio sistematico della matematica che sta dietro alle costruzioni matematica mise in evidenza l'impossibilità di trovare una soluzione a questi tre problemi mediante i soli strumenti di riga e compasso.

L'impossibilità di risolvere sia il problema della duplicazione del cubo che il problema della trisezione dell'angolo con il solo uso di riga e compasso venne provata algebricamente dal matematico francese **Pierre Laurent Wantzel** nel 1837.

Infine, non fu che nel 1882 che **Ferdinand von Lindemann** provò rigorosamente l'impossibilità della quadratura del cerchio dimostrando la trascendenza di π.

4 La macchina algebrica

Paolo Giangrandi
paolo.giangrandi@dimi.uniud.it

Università degli Studi di Udine

28/04/2010

Introduzione

Se è vero che i numeri sono stati la prima struttura dati su cui l'uomo ha imparato ad operare algoritmicamente, **un'altra importante struttura che nel corso dei secoli è stata oggetto di manipolazioni algoritmiche è quella delle equazioni**, che ha giocato un ruolo fondamentale nella storia della matematica.

In generale, un'**equazione** è una relazione (o meglio un'uguaglianza) tra espressioni composte da quantità note e non note trattate in modo paritetico. Lo studio delle equazioni ha una lunga storia che, per molto tempo, **si identifica con la storia stessa dell'algebra**.

In particolare, il passaggio dall'aritmetica all'algebra fu contrassegnato da un cambiamento di prospettiva sul modo di risolvere i problemi che portò a mettere in rilievo nell'algebra la centralità dell'equazione:

- **mentre nell'aritmetica gli oggetti dell'operare sono essenzialmente numeri,**
- **nell'algebra gli oggetti da manipolare sono invece le equazioni stesse, che rappresentano strutture dati assai più complesse, in cui compaiono oltre i dati noti anche lettere per quantità incognite.**

Nell'evoluzione della **notazione algebrica**, seguendo la classificazione data dallo storico G.H.F. Nesselmann, si distinguono tre fasi principali:

- l'***algebra retorica***, nella quale i procedimenti algebrici vengono interamente espressi mediante l'uso del linguaggio naturale;
- l'***algebra sincopata***, nella quale alcuni termini vengono indicati mediante abbreviazioni,
- /'***algebra simbolica***, nella quale i termini vengono sistematicamente rappresentati da simboli "puri", come nella moderna algebra.

Sebbene oggi gli studiosi ritengano ampiamente superata la rigida sequenzialità cronologica di queste tre fasi, questa ripartizione è ancora utile anche per classificare i **linguaggi algebrici** utilizzati nel corso della storia della matematica.

La conquista del linguaggio simbolico non rappresentò semplicemente il raggiungimento di una notazione più comoda e compatta delle precedenti, ma **costituì soprattutto una sorta di "meccanizzazione" del calcolo stesso**.

Il linguaggio naturale (*algebra retorica*), con il significato associato a ciascuna parola, **maschera il processo di meccanizzazione del calcolo** così evidente nel calcolo letterale. Ad esempio, a prescindere dal significato (valore) specifico dei simboli, è possibile sostituire $(a + b)^2$ con $a^2 + 2ab + b^2$ e viceversa indipendentemente dai valori attribuiti ad a e b.

Senza la "meccanizzazione" formale delle regole algebriche sarebbe stato probabilmente impossibile giungere ai moderni linguaggi algoritmici basati sulla manipolazione sintattica dei simboli.

L’algebra retorica e sincopata

Nelle primi documenti di carattere matematico mancano perfino le descrizioni degli algoritmi e i procedimenti vengono dati semplicemente mediante esempi numerici.

Nei documenti più antichi (ad esempio relativi alla matematica egizia più antica o a quella sumera) **spesso i risultati dei problemi vengono riportati senza neppure indicare la sequenza delle operazioni svolte**, per cui risulta difficile ricostruire i procedimenti seguiti.

Solo lentamente si è passati ad una descrizione algoritmica mediante il linguaggio naturale.

In che modo venivano formulati i procedimenti di calcolo?

L’esempio qui proposto è tratto dal ***papiro di Mosca***:

Problema 19

Metodo per calcolare un mucchio (1 + ½) volte [questo mucchio] con 4 è diventato 10. Quanto è questo mucchio?

Calcola tu l’eccesso di questo 10 sopra 4, è 6. Calcola tu con 1 + ½ fino a che trovi 1. Risulta 2/3. Pensa tu 2/3 di questo 6. Risulta 4. Ecco, è 4; tu l’hai trovato correttamente.

Si tratta di un ***problema aha***, cioè di un problema dove si deve di trovare il valore di una quantità incognita, indicata con il termine “**aha**” (“mucchio”). La prima riga descrive infatti l’equazione in linguaggio naturale facendo ricorso al termine *aha*; nel linguaggio moderno il problema si riduce all’equazione di primo grado:

$$(1 + 1/2)\, x + 4 = 10$$

Il testo dice di procedere nel seguente modo:

- prima si porta il termine 4 nel secondo membro determinando la sottrazione 10 – 4 = 6;
- poi, dopo aver calcolato al somma 1 + ½, se ne calcola il reciproco, cioè 2/3;
- infine, si determina il valore dell'incognita moltiplicando il termine noto, 6, per 2/3 ottenendo $x = 4$.

Il **testo è di tipo retorico** in quanto la descrizione data non fa uso di alcun simbolismo, ma questo non significa con un'organizzazione del tutto libera: un problema comprendeva solitamente un titolo con i dati noti (evidenziato con l'inchiostro rosso), una procedura per risolvere il problema e, eventualmente, una verifica del risultato. I testi dei problemi seguono poi una grammatica e un lessico molto standardizzato e con una struttura abbastanza regolare.

La mancanza di una notazione simbolica non significa che i procedimenti non vadano intesi comunque come schemi generali, come sottolinea lo stesso Neugebauer,

> ***"Dagli esempi effettivamente calcolati appare evidente che si attribuiva importanza al procedimento generale, e non al risultato numerico.*** **[…]** ***I numeri che accompagnano questi esempi non hanno altra funzione che quella di offrire una guida conveniente per illustrare il processo generale che sta alla base di tutti questi calcoli. E' dunque erroneo negare all'algebra babilonese l'uso di una "formula generale."***

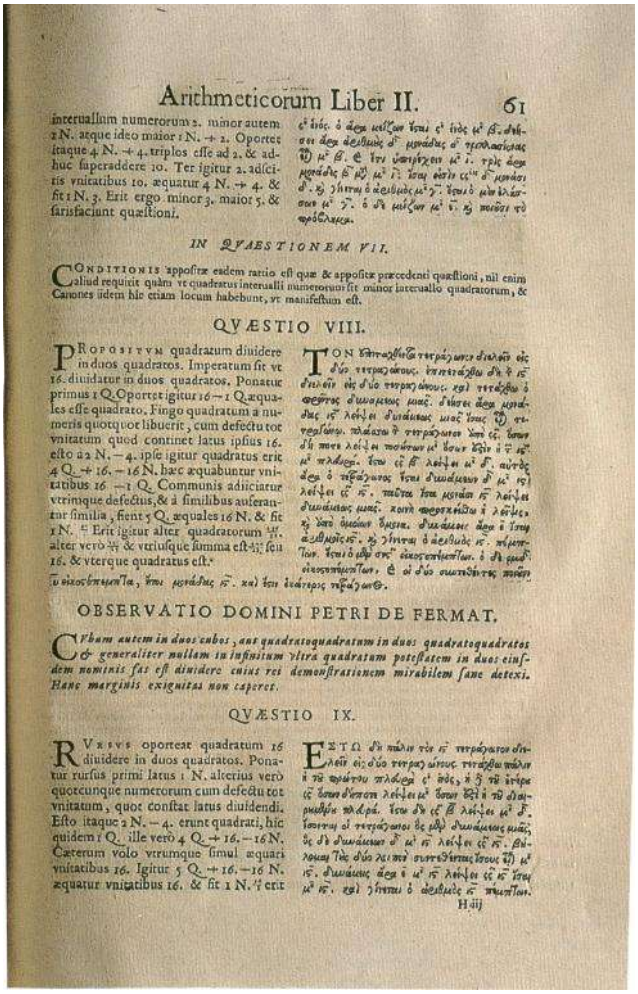
LINK

http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad_ancient_egypt.html

http://www.dipmat.unipg.it/~bartocci/PIRAM.htm

http://www-history.mcs.st-an-drews.ac.uk/history/HistTopics/Egyptian_papyri.html

L’algebra sincopata di Diofanto



Arithmeticorum Liber II. 61

interualllum numerorum 2. minor autem 2 N. æque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adscitis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem ratio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 — 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum a numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto 2 a 2 N. — 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. — 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 — 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{4}{5}$. Erit igitur alter quadratorum $\frac{144}{25}$. alter verò $\frac{256}{25}$. & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.*

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cvbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltrà quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oportet quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. — 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. — 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. — 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{4}{5}$ erit

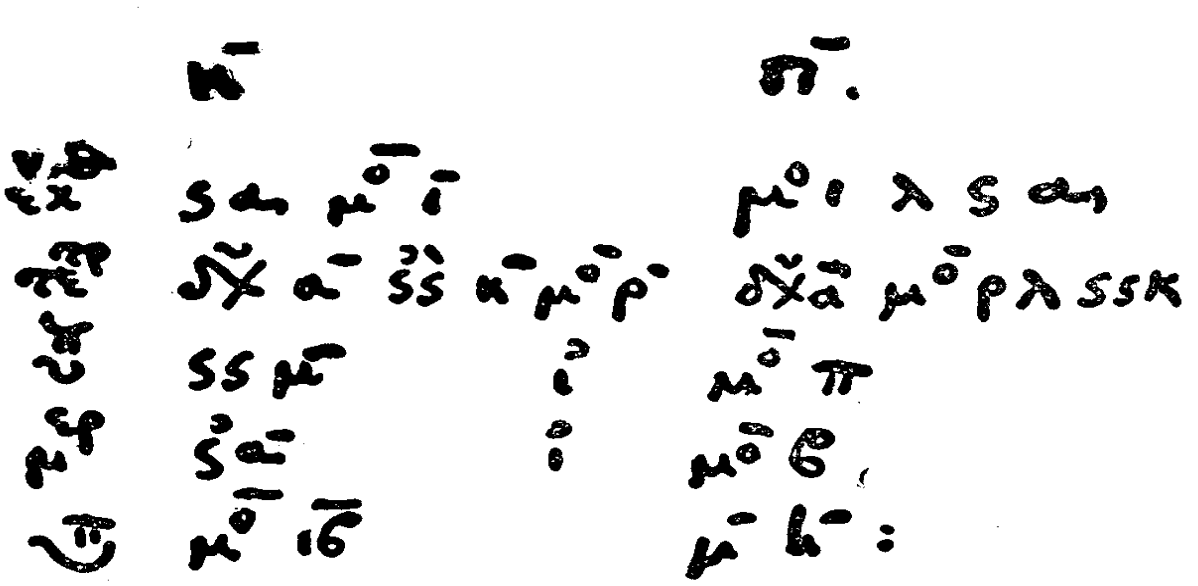
H iij

Fig. Traduzione di Pierre de Fermat dell’opera di Diofanto.

Gran parte della matematica greca di livello più elevato sembra riguardare la geometria e sembra mancare una trattazione altrettanto sistematica dell’algebra.

Tra i matematici greci che invece **si occuparono di problemi di tipo algebrico** e **tentarono di introdurre un linguaggio più efficace** per descrivere problemi algebrici va segnalato il matematico greco **Diofanto**, vissuto circa tra il 200 d.C. e il 284 d.C.

La sua opera più famosa è l'***Arithmetica***, di cui c'è arrivata solo una parte (10 capitoli su tredici). L'opera **non si presenta come una trattazione sistematica** dell'algebra, ma presenta una **collezione di 150 problemi** riguardanti principalmente la risoluzione esatta di equazioni determinate e indeterminate.



Un problema algebrico di Diofanto: Da un manoscritto del sec. XIV. Si tratta di trovare due numeri tali che la loro somma sia = 20, e la differenza dei loro quadrati = 80. I passaggi sono i seguenti:

Siano	$x + 10$	$10 - x$
Quadrati	$x^2 + 20x + 100$	$x^2 - 20x + 100$
Diff. dei quadrati	$40x$	$= 80$
Divisione	x	$= 2$
da cui	$x + 10 = 12$	$10 - x = 8$

Fig. Esempio di scrittura algebrica di Diofanto. (da http://www.dm.uniba.it/ipertesto/indice.doc)

La scrittura di Diofanto, secondo una classificazione dallo storico Nesselmann, costituisce un esempio di ***algebra sincopata***.

Questa notazione, pur essendo prevalentemente basata sull'uso di parole intere, spesso introduce alcune **abbreviazioni**, e singole lettere per denotare le quantità incognite.

Non si tratta ancora di un simbolismo di tipo moderno, ma rappresenta un importante passo in avanti rispetto alla matematica antica, interamente verbale (chiamata pertanto ***algebra retorica***).

Oggi sappiamo anche che non si tratta di un'invenzione completamente nuova di Diofanto dal momento che in un papiro antecedente di un secolo (il ***papiro di Michigan***) sono presenti forme di simbolismo simili a quelle di Diofanto.

All'inizio dell'***Arithmetica*** Diofanto introduce diverse abbreviazioni. Ad esempio, indica l'**incognita** con un simbolo molto simile alla **lettera greca** ς (stigma), lettera arcaica addizionale precedente a quella dell'Età classica, forse ad indicare la lettera finale della parola **αριθμός**, che significa "numero".

Ecco inoltre come rappresenta le potenze dell'incognita:

x	αριθμός ("numero")	ζ
x^2	δύναμις (cioè "potenza")	Δ^Y
x^3	χύβος ("cubo")	K^Y
x^4	δυναμοδύναμις ("potenza-potenza")	$\Delta\,\Delta^Y$
x^5	δυναμόχυβος, ("potenza-cubo")	$\Delta\,K^Y$
x^6	χυβόχυβος	$K\,K^Y$

Altri simboli usati nell'*Arithmetica* sono:

- **M°**, questo simbolo seguito da un numero indica il termine noto di un'equazione; questa notazione è formata dalle prime due lettere della parola *"monade",* che significa *unità*.
- ↑ è il segno usato per indicare la sottrazione;
- **ί$^{\sigma}$** è usato per indicare il segno uguale;
- **έν** indica spesso l'operazione di divisione.

Nessun segno viene usato per l'addizione: la somma di due o più termini viene indicata scrivendo di seguito gli addendi.

Ἔστω τὸ τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει ς γ̄, ς δ̄, ς ε̄, καὶ πάλιν γίνεται ζητεῖν Δ^Υ ς̄ Λ ς ε̄ ἴσ. □^φ, καὶ Δ^Υ ς̄ Λ ς γ̄ ἴσ. □^φ. καὶ ἐὰν ποιήσω Δ^Υ ς̄ Λ ς γ̄ ἴσ. □^φ, γίνεται ὁ ς Μ̊ γ̄ ἐν μορίῳ Μ̊ ς̄ Λ Δ^Υ ᾱ.

καὶ τοιούτου εὑρεθέντος, αἱ Δ^Υ ς̄ γίνονται Μ̊ νδ̄ ἐν μορίῳ Δ^Υ Δ ᾱ Μ̊ λς̄ Λ Δ^Υ ιβ̄. καὶ δεῖ ἀπὸ Μ̊ νδ̄ ἐν μορίῳ Δ^Υ Δ ᾱ Μ̊ λς̄ Λ Δ^Υ ιβ̄ ⟨ἀφελεῖν τοὺς ε̄ ς⟩, ἔσονται ἄρα αἱ Μ̊ ϛ̄ Λ Δ^Υ ιε̄ ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ λοιπὰ ποιεῖν ἴσ. □^φ· γίνονται δὲ λοιπαὶ Δ^Υ ιε̄ Λ Μ̊ λς̄ ἐν μορίῳ Δ^Υ Δ ᾱ Μ̊ λς̄ Λ Δ^Υ ιβ̄ ἴσ. □^φ· καὶ ἔστιν τὸ μόριον □^ος· ὥστε καὶ Δ^Υ ιε̄ Λ Μ̊ λς̄ ἴσ. □^φ.

Esto triangulum datum specie: $3x$, $4x$, $5x$. Rursus fit quaerendum:

$$6x^2 - 5x = \square, \quad \text{et} \quad 6x^2 - 3x = \square.$$

Si $6x^2 - 3x$ aequo □, fit x quotiens ex 3 diviso per $(6 - x_1^2)$.

Sic invento x, fiunt

$$6x^2 = \frac{54}{x_1^4 + 36 - 12x_1^2}$$

et a $\frac{54}{x_1^4 + 36 - 12x_1^2}$ oportet ⟨subtrahere $5x$⟩, hoc est $\frac{90 - 15x_1^2}{x_1^4 + 36 - 12x_1^2}$ et residuum aequare quadrato. At residuus est

$$\frac{15x_1^2 - 36}{x_1^4 + 36 - 12x_1^2} = \square,$$

Fig. Un esempio di algebra sincopata: il Problema XXVIII del Libro I dell'*Arithmetica* con traduzione in latino (Tannery 1893, pag. 62).

Così l'espressione

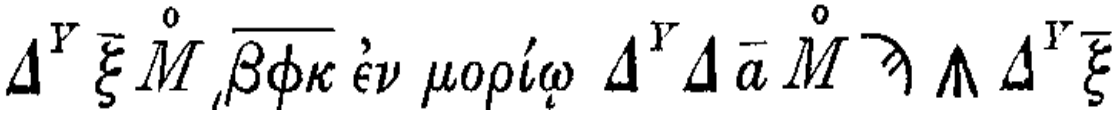
$$2x^2 + 3x,$$

per Diofanto sarebbe stato

$$\Delta^{\Upsilon}\beta\zeta\gamma$$

nella quale non viene utilizzato nessun simbolo per l'addizione e i numeri 2 e 3 sono rappresentati rispettivamente da β, γ e seguono il termine letterale.

Un altro esempio di scrittura usata da Diofanto è il seguente:



la cui traduzione nel nostro simbolismo è:

$$(60\,x^2 + 2520) / (x^2 + 900 - 60\,x^2)$$

Fig. Un esempio di quoziente di polinomi, tratto dal Problema XIV del Libro VI dell'Arithmetica di Diofanto.

Vediamo ora come Diofanto descrive il procedimento per risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ y - x = 40 \end{cases}$$

Problema:

Che il numero dato sia 100 e che la differenza sia 40 unità. Trovare i numeri.

Soluzione:
Poniamo uguale ad un'incognita il più piccolo numero [x]; il più grande sarà pertanto l'incognita più 40 unità [x + 40]. Ora questa somma sono le 100 unità date, dunque 100 unità sono uguali a due incognite più 40 unità [2x + 40. Sottraiamo le quantità simili dai simili, cioè 40 unità da 100 e, inoltre, 40 unità da 2 incognite più 40 unità. Le due incognite rimaste sono uguali a 60 unità e ciascuna incognita è 30 unità.
Ritorniamo a quello che avevamo posto: il più piccolo numero sarà 30 unità, cosicché il più grande sarà 70 unità e la prova è evidente.

I problemi non sono ancora formulati in modo del tutto generale, ma fanno ancora riferimento a esempi numerici specifici, secondo una pratica che verrà seguita ancora per parecchi secoli.

Non c'è alcun tentativo di sfruttare la notazione sincopata per costruire una teoria organica delle equazioni.

Tra l'altro Diofanto non si preoccupa di fornire tutte le possibili soluzioni dei suoi problemi, ma ne considera sempre una sola.

L'opera e in particolare la notazione di Diofanto rimasero comunque a lungo dimenticati e solo nel 1500-1600 con la riscoperta dei testi classici i matematici europei (tra questi va ricordato Pierre de Fermat) approfondirono e compresero l'importanza del lavoro del grande matematico.

LINK

http://www.math.rutgers.edu/courses/436/436-s00/Papers2000/kirschm.html

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Diophantus.html

L’algebra di Brahmagupta

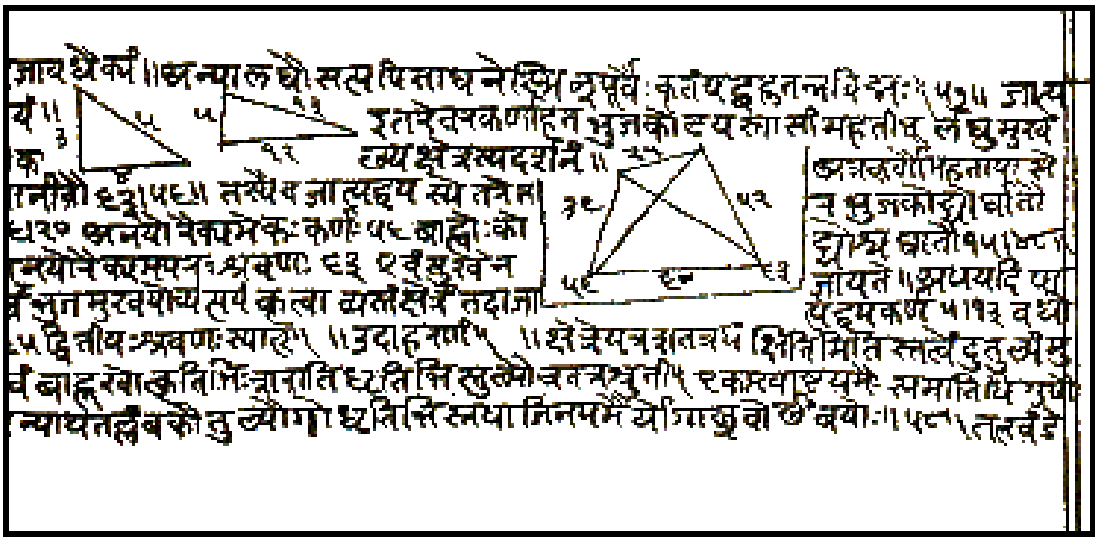


Fig. Frammento di uno scritto di Brahamagupta sulla formula per i quadrilateri ciclici.

Dopo gli enormi progressi della civiltà greca nella matematica, **l’Europa visse un lungo periodo di decadenza** e il primato delle ricerche matematiche più interessanti si spostò presso altre civiltà.

In particolare, in **India** diversi matematici contribuirono ad introdurre nuove idee matematiche particolarmente interessanti.

Due caratteristiche significative della matematica indiana antica che la distinguono da quella greca furono una **notevole indipendenza dell’algebra dalla geometria** e l’**uso dei simboli**, quali punti (nel manoscritto di Bakhshali) o lettere dell’alfabeto, **per indicare quantità incognite**.

I matematici indiani furono probabilmente i primi a fare un uso sistematico di questo metodo di rappresentazione delle incognite.

Brahmagupta (circa 598-670), una delle figure più importanti della matematica indiana, introdusse i numeri relativi dando le regole corrette per operare con essi. In questa sezione vogliamo vedere in che modo Brahmagupta descrive il procedimento per risolvere un'equazione di 1° grado:

> **"*Se quattro volte la dodicesima parte della somma tra uno e l'incognita, aumentato di otto è uguale all'incognita aumentata di uno, dimmi il valore dell'incognita*"**.

Nella scrittura moderna si tratta dell'equazione

$$4 \cdot \frac{x+1}{12} + 8 = x + 1$$

Brahmagupta prima costruisce l'equazione che riflette le relazioni descritte nel testo del problema e poi mostra il procedimento risolutivo:

commento	simbolismo di Brahmagupta	notazione moderna
	ya 1 ru 1	**(x + 1)**
	ya 1 ru 1 **12**	**(x + 1)** **--------** **12**
e il quadruplo è	**ya 1 ru 1** **3**	**(x + 1)** **--------** **3**
aumentato con il numero assoluto otto, si ottiene	**ya 1 ru 25** **3**	**(x + 25)** **--------** **3**
Dopo aver indicato a parole il secondo membro dell'equazione (x + 1) e "*prendendo il triplo di entrambi*", Brahmagupta scrive l'intera equazione ponendo i due membri uno sotto l'altro, cioè nella forma:	**ya 1 ru 25** **ya 3 ru 3**	**(x + 25 = 3x + 3)**
Riguardo alle incognite, semplificando si ha	**ya 2**	**[(3x – x => 2x]**
e per i termini	**22**	**[(25 – 3 => 22]**
ottenendo infine il risultato	**11**	**[x = (25 – 3)/(3 – 1)]**

LINK

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brahmagupta.html

Le equazioni di al-Khwarizmi

A partire dal 750 d.C. la civiltà araba diede importanti apporti nel campo della matematica raggiungendo forse il livello più alto a livello mondiale per alcuni secoli.

Di questi contributi forse il più importante riguarda lo **sviluppo dell'algebra** come disciplina autonoma. Il primo matematico a dare una svolta fondamentale a questo settore fu **al-Khwarizmi** (circa 780-850), la cui opera, scritta attorno al 830 d.C., oltre a dare il nome alla disciplina dalla parola '***al-jabr***', contiene la prima importante classificazione delle equazioni mai realizzato prima e di fatto fissa quei procedimenti risolutivi che ancora oggi adottiamo.

Per ricondurre le equazioni di vario tipo ai casi base al-Khwarizmi si serve di tre regole di trasformazione che permettono di manipolare e semplificare la struttura dell'equazione:

- **operazione *al-jabr***: l'equazione $2x^2 = 80x - 3x^2$ viene trasformata in $5x^2 = 80x$;
- **operazione *al-muqabala:*** l'equazione $40 + x^2 = 19 + 10x$ viene trasformata in $21 + x^2 = 10x$.
- **operazione *al-hatt***: l'equazione $42 + 2x^2 = 20x$ viene trasformata in $21 + x^2 = 10x$.

L’interpretazione di queste tre operazioni non è sempre univoca, ma testimoniano il passaggio dalla manipolazione di numeri alla manipolazione di equazioni.

Il limite più importante del lavoro di al-Khwarizmi è costituito invece dalla mancanza di una notazione adeguata per rappresentare le equazioni stesse da manipolare dal momento che egli utilizza unicamente l’algebra retorica.

Qui possiamo vedere in che modo al-Khwarizmi descrive l'equazione e l'algoritmo risolutivo:

Ho diviso dieci in due parti, poi ho moltiplicato ogni parte per se stessa ed **[ho]** ***preso la somma delle due, che fa cinquattotto dirham[2].***	**descrizione problema**
Poni una delle due parti **[uguale]** ***una cosa e l'altra*** **[uguale a]** ***dieci meno una cosa. Moltiplica dieci meno una cosa per se stesso, fa cento più un censo meno 20 cose, poi*** **[moltiplica]** ***una cosa per una cosa, fa un censo. Poi addiziona entrambi*** **[i prodotti]**, ***fa cento più due censi meno 20 cose,*** **[il tutto]** ***equivalente a cinquattotto dirham.***	**equazione:** $(10 - x)^2 + x^2 = 58$ $100 + x^2 - 20x + x^2 = 58$ $100 + 2x^2 - 20x = 58$
Restaura il cento più due censi con le venti cosa mancanti e portale ai cinquantotto **[dirham]**, ***fa allora cento più due censi equivalente a cinquattotto dirham più venti cose.***	**operazione *al-jabr*** $100 + 2x^2 = 58 + 20x$
Riporta a un unico censo prendendo la metà di tutto **[ciò]** ***che hai. Fa cinquanta dirham più un censo equivalente a ventinove dirham più dieci cose.***	**operazione *al-hatt*:** $50 + x^2 = 29 + 10x$
Diminuiscilo, cioè sottrai da cinquanta ventinove, rimane ventuno più un censo uguale a dieci cose.	**operazione *al-muqabala*:** $21 + x^2 = 10x$
Dimezza le radici, fa cinque, e moltiplicalo per se stesso, fa venticinque. Sottrai da questo il ventuno legato al censo, rimane quattro. Prendi la sua radice che fa due e sottrai questo dalla metà delle radici, cioè cinque. Rimane tre che è una delle due parti e l'altra è sette.	**formula risolutiva:** $x = 10/2 - \sqrt{[(10/2)^2 - 21]}$
Questo problema ti ha riferito uno dei sei casi, cioè censi più numeri equivalente a radici.	$x^2 + c = bx$

[2] Il dirham è una moneta araba.

Come possiamo vedere si tratta di una descrizione algoritmica puramente retorica non facile da seguire.

LINK

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Arabs.html

http://logica.rug.ac.be/albrecht/problems.php?code=KAA

L’algebra simbolica

La conquista dell’algebra simbolica fu una tappa fondamentale non solo per la matematica ma anche per la storia degli algoritmi per varie ragioni. Il simbolismo

- dà un carattere universale a ragionamenti ed operazioni che altrimenti applicati a numeri specifici non possono che cogliere solo casi particolari;
- permette di svolgere esplicitamente ragionamenti di carattere universale validi per un insieme di numeri e non per valori specifici;
- permette, nell'ambito delle equazioni, di vedere più facilmente la similitudine tra problemi apparentemente lontani e diversi;
- permette di evitare ambiguità tipiche del linguaggio naturale;
- mette a disposizione uno strumento fondamentale per astrarre sui problemi concreti; l’equazione ha la capacità di “racchiudere” tutte le informazioni essenziali del problema;
- permette di attribuire più facilmente nuove interpretazioni ad una struttura simbolica difficilmente immaginabili nel testo originale del problema: si pensi alla geometria analitica in cui ad un’equazione in forma simbolica viene associata una curva; infine
- aiuta ad evidenziare regole sintattiche per manipolare i dati del problema indipendentemente dalla semantica specifica.

La conquista del moderno linguaggio simbolico avvenne tra il 1500 e il 1600 e rappresentò un passo formidabile per la storia della matematica e indirettamente per quella degli algoritmi.

E' bene ricordare che alla diffusione di una moderna notazione matematica contribuì certamente l'**invenzione della stampa** (Gutenberg, 1455) che, oltre a diffondere sempre di più le opere in tutto il continente europeo, contribuì anche a standardizzare le notazioni.

Verso il calcolo simbolico

Tra il 1500 e il 1600 in Europa avvenne la metamorfosi dall'algebra retorica a quella simbolica passando attraverso quella sincopata. Anticipazioni di questa imminente rivoluzione si trovano in numerose opere matematiche precedenti, come ad esempio, di Leonardo Pisano, di Giordano Nemorario, di Regiomontano, Maurolico, di Cardano, di Bombelli.

Nel suo testo più famoso del 1484, il *Triparty*, **Chuquet** scriveva ancora

8^3 multiplié par 7^{1m} monte 56^2

per indicare nel linguaggio algebrico moderno l'equazione

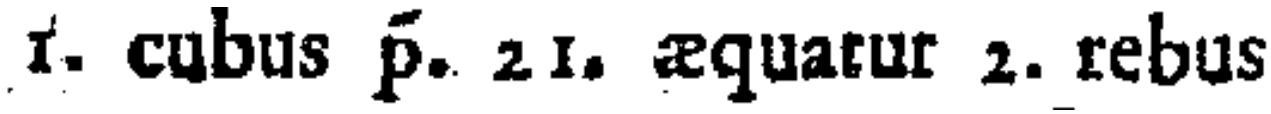
$$8x^3 \cdot 7x^{-1} = 56x^2$$

Inizia comunque il passaggio dall'algebra "retorica", in cui le diverse operazioni sono descritte in linguaggio naturale, a quella "sincopata", in cui i termini del linguaggio naturale appaiono abbreviati.

Il frate e matematico **Luca Pacioli** nel suo testo più noto, *Summa de aritmetica, geometria, proporzioni et proporzionalità*, del 1494 scrive l'equazione $x + x^2 = 12$ in notazione sincopata

Trovame 1.n°. che gioto al suo qdrato facia .12

Ancora nel 1545, nell'*Ars Magna* di **Gerolamo Cardano** l'equazione $x^3 + 21x = 2x$ viene scritta in forma sincopata come



Comunque nessuno di questi matematici capì in modo pieno e profondo l'importanza dell'algebra simbolica e l'uso di linguaggio rimase solo occasionale.

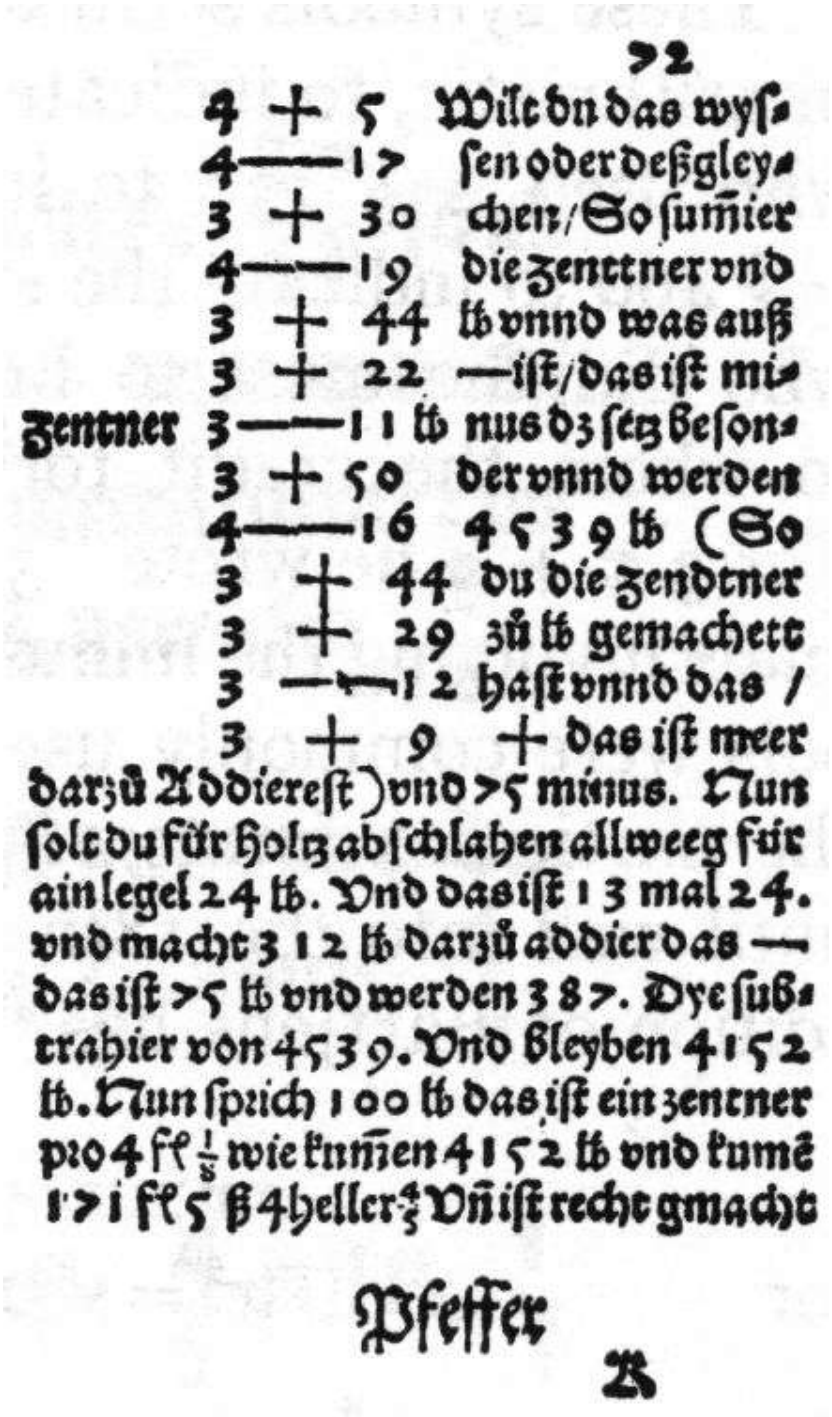
Forse la persona che più tutti seppe avvicinarsi alla notazione simbolica fu **Rafael Bombelli** (1526-1572), di cui vediamo alcuni esempi in tabella:

Modern notation	Bombelli printed	Bombelli written
$5x$	$\overset{1}{\underset{}{5}}$	$\overset{1}{\underset{}{5}}$
$5x^2$	$\overset{2}{\underset{}{5}}$	$\overset{2}{\underset{}{5}}$
$\sqrt{4+\sqrt{6}}$	Rq⌊4pRq6⌋	R⌊4pR6⌋
$\sqrt[3]{2+\sqrt{0-121}}$	Rc⌊2pRq⌊0m121⌋⌋	$R^3\lfloor\overline{2pR\lfloor 0m121\rfloor}\rfloor$

Il passo decisivo, questa volta consapevole delle potenzialità della notazione simbolica, venne invece compiuto dal matematico francese Francois Viète verso la fine del 1550.

Tra il 1400 e il 1600 cominciarono ad essere introdotti anche i moderni simboli delle operazioni, che assieme all'uso delle lettere furono un prerequisito essenziale per l'introduzione dell'algebra simbolica. **I simboli "più" (+) e "meno" (–)** comparvero ad esempio per la prima volta in nel testo *Behende und hüpsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft*, di Johannes Widmann (nato c. 1460), pubblicato a Lipsia nel 1489.

Nel giro di un secolo mezzo fecero la loro comparsa anche gli altri simboli matematici oggi comunemente usati.



72

4 + 5 Wilt du das wyſ-
4 — 17 ſen oder deßgley-
3 + 30 chen/ So ſum̃ier
4 — 19 die Zenttner vnd
3 + 44 ℔ vnnd was auß
3 + 22 —iſt/ das iſt mi-
Zentner 3 — 11 ℔ nus dz ſetz beſon-
3 + 50 der vnnd werden
4 — 16 4539 ℔ (So
3 + 44 du die Zendtner
3 + 29 zů ℔ gemachett
3 — 12 haſt vnnd das /
3 + 9 + das iſt meer
darzů Addiereſt) vnd 75 minus. Nun
ſolt du für Holtz abſchlahen allweeg für
ain legel 24 ℔. Vnd das iſt 13 mal 24.
vnd macht 312 ℔ darzů addier das —
das iſt 75 ℔ vnd werden 387. Dye ſub-
trahier von 4539. Vnd bleyben 4152
℔. Nun ſprich 100 ℔ das iſt ein zentner
pro 4 fl ⅛ wie kum̃en 4152 ℔ vnd kumẽ
171 fl 5 ß 4 heller ⅘ Dñ iſt recht gmacht

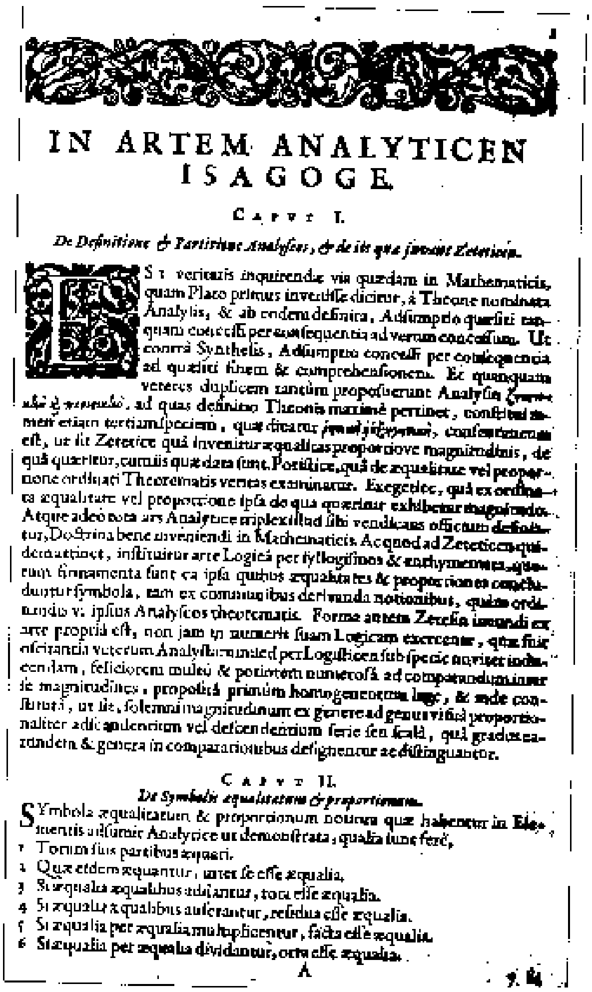
Pfeffer

A

Fig. Here is an image of the first use in print of the + and - signs, from Widman's *Behennde vnd hüpsche Rechnung.* This image is taken from the Augsburg edition of 1526.

Da Viète alla notazione simbolica moderna

Tra i personaggi che maggiormente contribuirono all'introduzione del linguaggio simbolico va ricordato il matematico francese **Francois Viète** (1540 - 1603), che introdusse una notazione innovativa per le equazione. In Viète le trasformazioni algebriche, che noi oggi adottiamo per trasformare e semplificare le equazioni diventano "una forma di ragionamento e non più un insieme di ingegnosi artifici, come l'aveva concepita Diofanto".



IN ARTEM ANALYTICEN ISAGOGE.

CAPUT I.

De Definitione & Partitione Analyseos, & de iis quæ juvant Zeteticen.

Est veritatis inquirendæ via quædam in Mathematicis, quam Plato primus invenisse dicitur, à Theone nominata Analysis, & ab eodem definita, Adsumptio quæsiti tanquam concessi per consequentia ad verum concessum. Ut contra Synthesis, Adsumptio concessi per consequentia ad quæsiti finem & comprehensionem. Et quanquam veteres duplicem tantùm proposuerunt Analysin ζητητικὴν & ποριστικὴν, ad quas definitio Theonis maximè pertinet, constitui tamen etiam tertiam speciem, quæ dicatur ῥητικὴ ἢ ἐξηγητικὴ, consentaneum est, ut sit Zetetice quâ invenitur æqualitas proportiove magnitudinis, de quâ quæritur, cum iis quæ data sunt. Poristice, quâ de æqualitate vel proportione ordinati Theorematis veritas examinatur. Exegetice, quâ ex ordinata æqualitate vel proportione ipsa de qua quæritur exhibetur magnitudo. Atque adeò tota ars Analytice triplex illud sibi vendicans officium definiatur, Doctrina bene inveniendi in Mathematicis. Ac quod ad Zeteticen quidem attinet, instituitur arte Logicâ per syllogismos & enthymemata, quorum firmamenta sunt ea ipsa quibus æqualitates & proportiones concluduntur symbola, tam ex communibus derivanda notionibus, quàm ordinandis vi ipsius Analyseos theorematis. Forma autem Zetesin ineundi ex arte propria est, non jam in numeris suam Logicam exercente, quæ fuit oscitantia veterum Analystarum: sed per Logisticen sub specie noviter inducendam, feliciorem multo & potiorem numerosâ ad comparandum inter se magnitudines, propositâ primùm homogeneorum lege, & inde constitutâ, ut fit, solemni magnitudinum ex genere ad genus vi suâ proportionaliter adscendentium vel descendentium serie seu scalâ, quâ gradus earundem & genera in comparationibus designentur ac distinguantur.

CAPUT II.

De Symbolis æqualitatum & proportionum.

Symbola æqualitatum & proportionum notiora quæ habentur in Elementis assumit Analytice ut demonstrata, qualia sunt ferè,

1 Totum suis partibus æquari.
2 Quæ eidem æquantur, inter se esse æqualia.
3 Si æqualia æqualibus adjiciantur, tota esse æqualia.
4 Si æqualia æqualibus auferantur, residua esse æqualia.
5 Si æqualia per æqualia multiplicentur, facta esse æqualia.
6 Si æqualia per æqualia dividantur, orta esse æqualia.

A

Fig. Isagoge in Artem Analyticem di Viète.

Con la sua notazione simbolica, che compare per la prima volta nel trattato ***Isagoge in Artem Analyticem*** (pubblicato nel 1591), egli si propone di introdurre un linguaggio matematico generale indipendente dagli esempi numerici fino ad allora usati.

Egli chiamava la sua algebra simbolica *logistica speciosa* in contrapposizione con la *logistica numerosa*, che serviva per trattare i numeri.

Nella sua opera egli utilizzò sistematicamente lettere per indicare le incognite (in particolare le vocali), ma egli non si fermò solo a questo aspetto; infatti, procedette anche ad usare lettere (più precisamente, consonanti) per indicare parametri o coefficienti da considerarsi comunque quantità note.

Per le operazioni invece continuò ad usare le parole per non confonderle con le quantità note o incognite. Ad esempio, un'equazione a parametri come

B in A aequantur A quad. + Z quad.

significava $bx = x^2 + z^2$. Questo tipo di scrittura gli permise comunque di studiare in modo generale intere classi di equazioni.

Fig. La notazione algebrica di Viète. (da http://www.lindahall.org/events_exhib/exhibit/exhibits/y1k/numbers2.shtml)

A partire da Viète, le lettere furono sempre più di frequente utilizzate per indicare nella matematica.

Naturalmente, il passaggio ad una notazione simbolica non fu compiuto tutto da Viète.

Fig. Francois Viète. (da http://www-

Anche Cartesio diede importanti contributi all'algebra simbolica.

Nell'inventare notazioni si distinse molto di più **Leibniz**, il quale introdusse vari simboli ancora oggi in uso. Leibniz era infatti convinto che una buona notazione fosse fondamentale per fare progredire la matematica stessa. In questa direzione si spinse perfino ad immaginare un linguaggio logico universale con cui poter affrontare in modo inconfutabile tutti i ragionamenti. La sua notazione più famosa riguarda l'operatore integrale: dopo aver utilizzato il simbolo "*omn.*" probabilmente come contrazione della parola latina *omnium*, nel 1675 introdusse il simbolo $\int$:

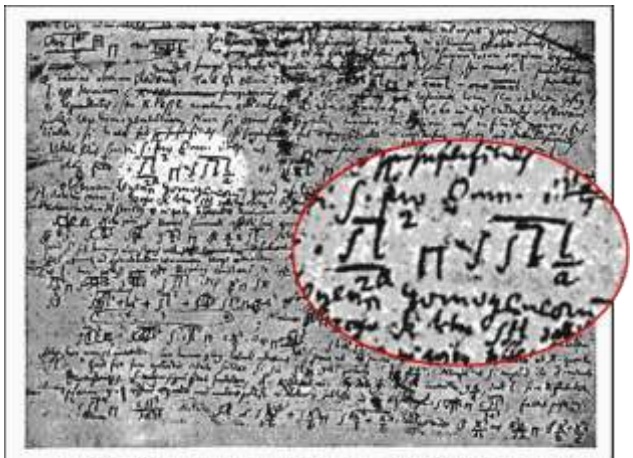


FIG. 124.—Facsimile of manuscript of Leibniz, dated Oct. 29, 1675, in which his sign of integration first appears. (Taken from C. I. Gerhardt's *Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern* [1899].)

Nel 1700, **Eulero**, seguendo le orme di Leibniz, innovò ulteriormente la notazione matematica. Egli cominciò ad utilizzare in modo sistematico le lettere romane e greche per le variabili e la notazione usata nei suoi testi ci appare molto vicino a quello in uso oggi.

forma generalis autem sumendo $m = 3n$ praebet

$$\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{n-1}\cdot\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{2n-1}}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{4n-1}} = k\int\frac{x^{3nk-1}dx}{(1-x^k)^{1-n}},$$

quibus coniungendis adipiscimur

$$\frac{\left(\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{n-1}\right)^4}{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{4n-1}} = k^3\int\frac{x^{nk-1}dx}{(1-x^k)^{1-n}}\cdot\int\frac{x^{2nk-1}dx}{(1-x^k)^{1-n}}\cdot\int\frac{x^{3nk-1}dx}{(1-x^k)^{1-n}}.$$

Sit nunc $n = \frac{i}{4}$ et sumatur $k = 4$ fietque

$$\frac{\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{\frac{i}{4}-1}}{\sqrt[4]{1\cdot 2\cdot 3\cdots(i-1)}} = \sqrt[4]{4^3}\int\frac{x^{i-1}dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-i}}}\cdot\int\frac{x^{2i-1}dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-i}}}\cdot\int\frac{x^{3i-1}dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-i}}}.$$

COROLLARIUM 1

35. Si igitur sit $i = 1$, habebimus

$$\int dx\sqrt[4]{\left(l\frac{1}{x}\right)^{-3}} = \sqrt[4]{4^3}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}\cdot\int\frac{xxdx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}};$$

quae expressio si littera P designetur, erit in genere

$$\int dx\sqrt[4]{\left(l\frac{1}{x}\right)^{4n-3}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdots\frac{4n-3}{4}P.$$

COROLLARIUM 2

36. Pro altero casu principali sumamus $i = 3$ eritque

$$\int dx\sqrt[4]{\left(l\frac{1}{x}\right)^{-1}} = \sqrt[4]{2\cdot 4^3}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

seu facta reductione ad simpliciores formas

$$\int dx\sqrt[4]{\left(l\frac{1}{x}\right)^{-1}} = \sqrt[4]{8}\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}};$$

L’importanza e la notevole diffusione delle opere di Eulero contribuì a divulgare e a standardizzare la notazione matematica, ormai praticamente identica a quella oggi in uso. A questo punto le differenze tra la notazione del tempo e quella adottata oggi divennero sempre più piccole e le opere dei matematici ci appaiono molto simili a quelle moderne.

LINK

http://www.stephenwolfram.com/publications/talks/mathml/mathml2.html

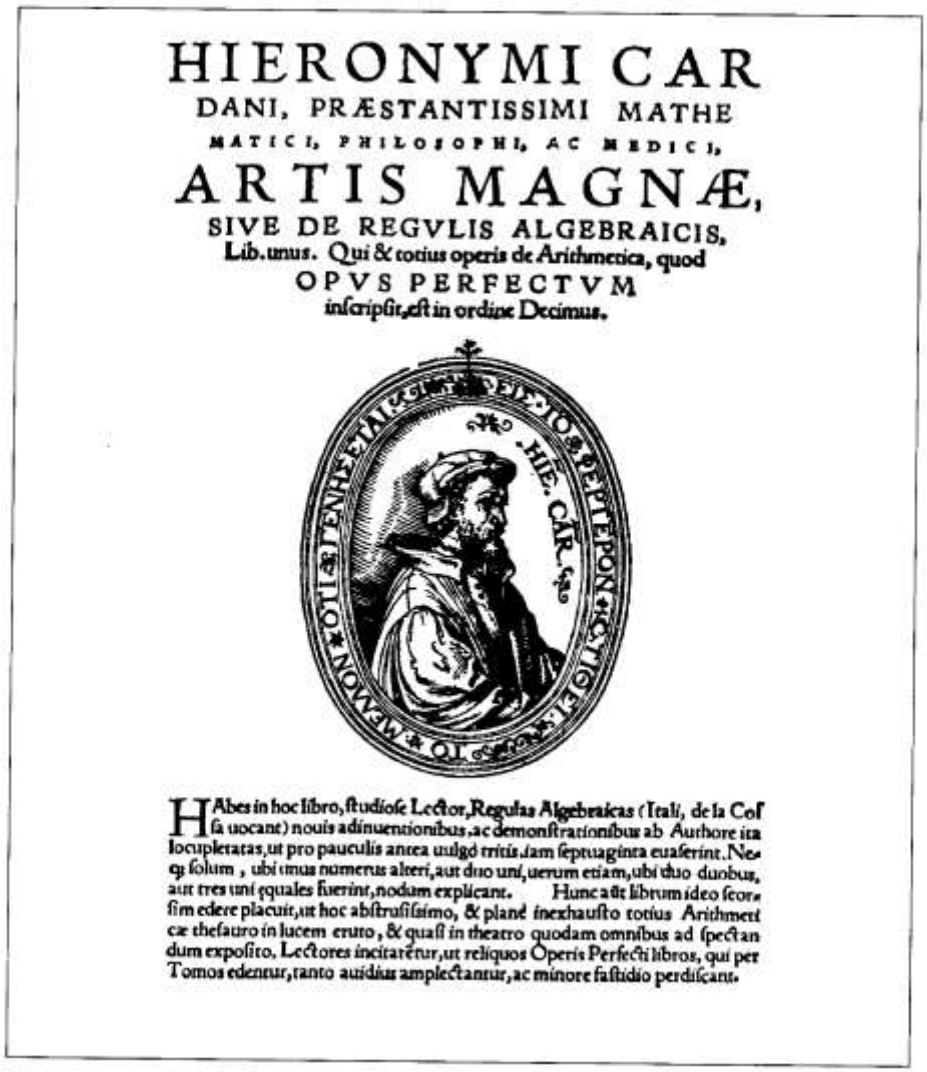
Oltre le equazioni di secondo grado

La risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado

Fig. Niccolò Fontana, detto Tartaglia (1499-1557).

Per tutto il medioevo la matematica europea non fece particolare progressi rispetto a quanto erano riusciti a raggiungere gli antichi greci. **Il primo risultato importante arrivò solo nel 1500 con la risoluzione (generale) delle equazioni di 3° grado grazie agli algebristi italiani.** I principali nomi legati a questa scoperta sono Scipione Dal Ferro, Niccolò Fontana e Antonio Maria Fior, Gerolamo Cardano e Ludovico Ferrari.

Nel 1545 la formula dell'equazione di terzo grado (insieme a quella di quarto grado, ricavata nel frattempo da Ludovico Ferrari) divenne di pubblico dominio poiché venne presentata nel libro ***Ars magna*** **di Gerolamo Cardano**.



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Nec id solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc autē librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Fig. Frontespizio dell'Ars Magna di Gerolamo Cardano.

Descrizione di Tartaglia del metodo risolutivo:

Quando chel cubo con le coſe appreſſo
Se agguaglia à qualche numero diſcreto
Trouan dui altri differenti in eſſo.
Dapoi terrai queſto per conſueto
Che'l lor produtto ſempre ſia eguale
Al terzo cubo delle coſe neto,
El reſiduo poi ſuo generale
Delli lor lati cubi ben ſottratti
Varra la tua coſa principale.
In el ſecondo de coteſti atti
Quando che'l cubo reſtaſſe lui ſolo
Tu oſſeruarai queſt'altri contratti,
Del numer farai due tal part'à uolo
Che l'una in l'altra ſi produca ſchietto
El terzo cubo delle coſe in ſtolo
Delle qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi inſieme gionti
Et cotal ſomma ſara il tuo concetto.
El terzo poi de queſti noſtri conti
Se ſolue col ſecondo ſe ben guardi
Che per natura ſon quaſi congionti.
Queſti trouai, & non con paßi tardi
Nel mille cinquecente, quatroe trenta
Con fondamenti ben ſald'e gagliardi
Nella citta dal mar'intorno centa.

Fig. L'algoritmo di risoluzione dell'equazione di 3° grado in versi data da Tartaglia.

Nella notazione moderna:

per l'equazione $\boxed{y^3 + py + q = 0.}$

si ha la formula risolutiva

$$\boxed{y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},}$$

Tra il 1539 e il 1545 **Cardano** e il suo brillante allievo **Ludovico Ferrari** (1522-1565) riuscirono inoltre a completare il lavoro di Tartaglia **trovando il modo di ricondurre una qualunque equazione di terzo grado ai casi risolubili con le formule** individuate dal matematico bresciano.

La cosa sorprendente è che il sistematico lavoro di indagine sulle equazioni **portò Ludovico Ferrari ad ottenere perfino la formula risolutiva delle equazioni di 4° grado**: se per passare dal secondo grado al terzo grado erano occorsi oltre due millenni, il passaggio dal terzo al quarto grado richiese meno di sei anni!

Alla ricerca della soluzione delle equazioni di quinto grado

A partire dallo straordinario lavoro degli algebristi italiani cominciò in tutta Europa la ricerca di nuovi procedimenti di calcolo per risolvere le equazioni di quinto grado e oltre.

Grazie anche alla notevole flessibilità operativa consentita dal linguaggio simbolico, **la risoluzione dell'equazione di quinto grado sembrava dietro l'angolo**.

Peraltro tra la risoluzione delle equazioni di terzo grado e quelle di quarto erano passati così pochi anni che una sorta di ingenuo ottimismo sembrava pervadere un po' tutti gli algebristi europei.

In fondo, le equazioni di 2°, 3° e 4° grado erano tutte risolvibili con formule che facevano uso di radici e, a sensazione, non sembrava esserci alcun motivo perché non si potesse proseguire per i gradi più alti alzando semplicemente l'ordine dei radicali da impiegare.

Ma **una cosa è risolvere un'equazione numericamente** determinando valori approssimati e **cosa ben diversa è risolvere un'equazione algebricamente**.

In altre parole, condizione essenziale per poter considerare risolta una data equazione è infatti quella di realizzare sull'equazione una serie di trasformazioni algebriche, come il completamento del quadrato per le equazioni di secondo grado visto nell'introduzione del capitolo, **in modo che l'espressione finale** (di lunghezza finita) in grado di esprimere le soluzioni **sia composta esclusivamente di operazioni razionali** (cioè somma, sottrazione, prodotto e divisione) **e di estrazione di radici di qualsivoglia indice**, applicate ai coefficienti (numerici o letterali) dell'equazione.

Per quanto riguarda l'insieme numerico da considerare, dopo i lavori di Bombelli divenne evidente che la ricerca andava fatta nell'ambito dei numeri complessi anche se per parecchio tempo la natura di questi numeri rimase poco chiara.

I primi seri ma purtroppo infruttuosi tentativi vennero compiuti dai matematici tedeschi Gottfried Wilhelm Leibniz e il suo amico **Ehrenfried Tschirnhaus** (1651-1708). Quest'ultimo, ispirato dal metodo di risoluzione delle equazioni di terzo grado dove con una semplice manipolazione algebrica è possibile eliminare il termine di secondo grado, introdusse nel 1683 delle interessanti trasformazioni algebriche che consentivano di eliminare alcuni dei termini dell'equazione generale di quinto grado rendendo possibile la soluzione dell'equazione, ma purtroppo Leibniz evidenziò che per determinare i coefficienti della trasformazione era necessario risolvere un'equazione di sesto grado, peggiorando il problema; da lì non ci fu modo di sbloccarsi.

Negli stessi anni anche **Newton**, che era interessato a problemi di algebra, oltre ad ideare un metodo approssimato per risolvere equazioni di qualunque tipo (oggi noto come metodo di Newton-Raphson), continuando precedenti lavori di Descartes e di Girard, trovò diverse relazioni generali che legavano i coefficienti delle equazioni ad espressioni che combinavano in vario modo le soluzioni; oltre però non riuscì ad andare.

Gli insuccessi nella ricerca di procedimenti risolutivi per le equazioni di quinto grado continuarono per tutto il Settecento e fecero di questo problema una delle questioni cruciali della matematica, anche perché l'enorme trasformazione tecnico-scientifica che stava conoscendo l'Europa in quel periodo, assieme all'invenzione del calcolo infinitesimale ponevano di sovente la necessità di trovare soluzioni a complesse equazioni. Anche il grande **Eulero**, dotato di straordinarie capacità tecniche e di una notevole dose di ottimismo, si occupò di questo spinoso dilemma.

L'ultimo grande tentativo fu compiuto dal matematico italo-francese **Joseph-Louis Lagrange** (1736-1813). A lui si deve l'attacco più poderoso al problema delle equazioni di quinto grado, che lo portò a scrivere un eccellente trattato sull'argomento: *Riflessioni sulla risoluzione algebrica delle equazioni* (1770).

Il teorema fondamentale dell'algebra

Prima di continuare la storia dei tentativi di risoluzione delle equazioni di quinto grado, vogliamo esaminare un'altra questione importante che negli stessi secoli in cui si va cercando la formula risolutiva delle equazioni di quinto grado corre parallelamente a questa, ossia **la questione riguarda il numero di soluzione di un'equazione algebrica**. Nonostante gli studi di numerosi importanti matematici ci vollero però duecento anni per fare chiarezza su di essa con il cosiddetto ***Teorema Fondamentale dell'Algebra*****:** *Ogni equazione algebrica polinomiale di grado n a coefficienti complessi ha n radici nel campo complesso.*

Alla fine del 1500 **Viète** aveva mostrato come costruire equazioni di grado *n* con *n* radici.

Descartes, a partire da vari esempi, congetturò che un'equazione di grado *n* doveva avere *n* soluzioni (quando si considerino anche le soluzioni complesse). Questo fatto rappresentò semplicemente un'intuizione perché Descartes non fu minimamente in grado di giustificare l'affermazione, che in verità era già stata anticipata dal matematico francese **Albert Girard** nel 1629 nel testo *L'invention en algèbre*[3].

Un po' alla volta i matematici si convinsero che la cosa fosse effettivamente vera e la questione venne posta come congettura da dimostrare.

A metà del Settecento venne fatto il primo e serio tentativo per dimostrare il Teorema Fondamentale dell'Algebra: l'artefice di questo primo sforzo fu il francese **Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert** (1717 – 1783) nel 1746 e sebbene la sua dimostrazione contenesse alcuni errori dal punto di vista del rigore, il procedimento in sé utilizzava diverse idee buone. Altre dimostrazioni di grandi matematici seguirono, ma tutte contenevano un qualche errore.

Il primo ad affrontare correttamente la questione fu il grande matematico tedesco **Carl Friederich Gauss** (1777-1855), che di fatto fornì una delle prime dimostrazioni di esistenza di notevole rilevanza.

A questo punto, **il fatto che per un'equazione di grado *n* esistono (nel campo) complesso sempre *n* soluzioni sembrava far pensare che ci dovesse essere un modo per calcolarle**: si trattava di completare l'opera trovando una formula risolutiva anche se a dire il vero il Teorema Fondamentale dell'Algebra non dava alcun indizio sul come trovare le soluzioni.

I limiti della macchina algebrica: il teorema di Abel-Ruffini

Il primo matematico ad invertire la rotta sul secolare problema della risoluzione delle equazioni di grado superiore al quarto fu il matematico **Paolo Ruffini**.

Verso la fine del Settecento, Ruffini cominciò a studiare in modo approfondito il problema della risoluzione delle equazioni e pervenne al suo risultato più significativo. Egli infatti intuì e poi dimostrò, sebbene in modo incompleto, che l'equazione generale di quinto grado non poteva essere risolta con una formula finita costruita con le quattro operazioni aritmetiche e le estrazioni di radici:

> *La soluzione algebrica di un'equazione generale di un grado qualunque maggiore del quarto è impossibile […] È vero essere impossibile in generale la soluzione delle equazioni di grado > 4; ma non è questo già vero in vari casi particolari. […] Inoltre, quantunque sia impossibile l'esatta soluzione generale della nostra equazione, pure potremo sempre aver questa per approssimazione, accostandoci ai veri valori delle radici quanto vogliamo.*

Questo risultato fondamentale e la sua dimostrazione sono racchiusi in un corposo trattato dal titolo ***Teoria generale delle equazioni***, scritto nel 1799, lo stesso anno in cui Gauss dimostrava il teorema fondamentale dell'algebra.

Egli confidava che l'importanza del suo lavoro fosse presto riconosciuta dalla comunità scientifica, ma **a questo punto cominciarono invece le incomprensioni nei confronti del matematico modenese**. Infatti, la dimostrazione era espressa in una forma molto difficile da capire e nonostante nel corso della sua vita Ruffini ne darà varie versioni migliorative, i matematici più prestigiosi del tempo non riconobbero il valore dell'impresa del matematico modenese.

Alcuni matematici, pur con moderazione, furono più favorevoli al lavoro di Ruffini. In particolare, **Cauchy**, che già allora godeva di una notevole reputazione, in una lettera che inviò a Ruffini nel 1822 diceva: "*La sua memoria sulla risoluzione generale delle equazioni è un lavoro che mi è sempre sembrato degno di attenzione dei matematici e che, secondo me, dimostra completamente che le equazioni di grado maggiore di quattro non sono risolvibili*". Pochi mesi dopo Ruffini, gravemente ammalato, moriva.

Oggi sappiamo che **nella dimostrazione di Ruffini mancava un passo essenziale**, non riconosciuto da nessuno dei suoi contemporanei, che di fatto impedisce di riconoscere a Ruffini il primato della dimostrazione.

Ciò non toglie che questo risultato rappresenti un'autentica svolta rispetto a tutti gli studi precedenti, perché fino ad allora nessun matematico, compreso Lagrange, la massima autorità in fatto di equazioni, era stato sfiorato dall'idea che il problema non potesse essere risolto. Bisogna dire che **a quel tempo le dimostrazioni di impossibilità costituivano concettualmente un qualcosa a cui i matematici non erano abituati**.

Il lavoro di Ruffini andava **a differenziare in modo netto i concetti di "esistenza di una radice" e "computabilità di una radice"**: che un certo numero esista, ma non lo si possa calcolare mediante le quattro operazioni e le radici neanche in linea teorica appariva allora davvero sconcertante. Il lavoro chiariva anche aspetti riguardanti **la potenza espressiva del linguaggio aritmetico con i radicali, che a questo punto, risultava non in grado di esprimere tutte le possibili soluzioni delle equazioni**.

Il passo necessario per completare definitivamente la questione della risoluzione delle equazioni venne compiuto un paio di decenni più tardi in modo del tutto indipendente da un altro matematico di una terra molto più a nord dell'Italia: **Niels Henrik Abel**, grandissimo matematico norvegese.

Dapprima ritenne di aver trovato un metodo per risolverle per radicali le equazioni di quinto grado, ma poco prima che la sua memoria venisse pubblicata da solo capì che la dimostrazione conteneva alcuni errori. A questo punto, cambiò completamente rotta e finalmente nel 1824, riuscì a dimostrare in modo completo e corretto che la risoluzione generale dell'equazione di quinto grado con una formula basata su radicali era impossibile:

> *[…] possiamo concludere che è impossibile risolvere per radicali l'equazione generale di quinto grado.*
>
> *Da questo teorema segue immediatamente che è anche impossibile risolvere per radicali equazioni generali di grado superiore.*

La dimostrazione di Abel non era molto diversa da quella del matematico italiano, ma ne colmava pienamente le lacune dimostrative.

Abel si attendeva un riconoscimento immediato e sperava così di poter dare una svolta alla propria vita con qualche prestigioso incarico risolvendo in tal modo anche i suoi gravi problemi economici. Le cose andarono ben diversamente: i grandi matematici, come Gauss e Cauchy, si dimostrarono alquanto freddi nei confronti del suo lavoro e Legendre addirittura perse il suo manoscritto.

Rientrato in Norvegia, lo sfortunato Abel si ammalò gravemente di tubercolosi, malattia che allora lasciava ben poche speranze. **Abel si spense il 6 aprile del 1829 a soli ventisei anni**. Ironia della sorte, due giorni dopo la sua morte, arrivò la lettera che annunciava che l'università di Berlino lo aveva nominato professore di matematica.

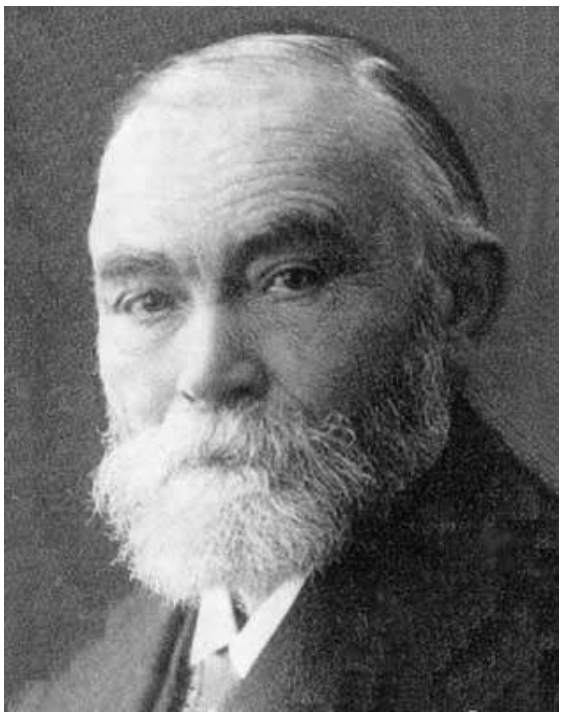
A conclusione di questa sezione, è bene osservare che i due teoremi che abbiamo visto in queste ultime due sezioni, il Teorema Fondamentale dell'Algebra e il teorema di Abel-Ruffini, mostrano la netta distinzione tra i concetti di computabilità e di esistenza per le soluzioni delle equazioni:

- il Teorema Fondamentale dell'Algebra è un risultato di analisi e riguarda sostanzialmente il livello semantico dei equazioni algebriche;
- il teorema di Abel-Ruffini, riguardando la possibilità di esprimere le soluzioni nel linguaggio dei radicali, è invece un risultato squisitamente algebrico che coinvolge il livello sintattico e ciò lo rende più interessante per la storia dell'informatica.

Questa discrepanza tra soluzioni esistenti e soluzioni computabili, alla luce dei numerosi risultati nel campo della teoria della computabilità, oggi appare facile da accettare, ma agli inizi dell'Ottocento rappresentò una svolta notevole che contribuirà un secolo più tardi a contrapporre la matematica "costruttivista" a quella "formalista".

5 La macchina logica

Paolo Giangrandi
paolo.giangrandi@dimi.uniud.it



Università degli Studi di Udine

28/04/2010

Introduzione

Il primo importante studio sulla logica lo si deve ad Aristotele (384-322 a.C) e celebri sono rimaste le sue forme di **sillogismo**. Purtroppo il **sillogismo aristotelico** inizialmente concepito con spirito scientifico-matematico uscì ben presto dalla sfera di studio della matematica per restare per molti secoli oggetto di discussioni filosofiche.

Fu soprattutto **Gottfried Leibniz** (1646-1716) a rinnovare l'interesse per la formalizzazione e meccanizzazione del ragionamento in termini logici attraverso gli strumenti formali della matematica staccando progressivamente la disciplina dalla filosofia.

Nell'Ottocento, le due figure più rappresentative che per prime seppero realizzare concretamente il sogno della “meccanizzazione” della logica furono, prima, l’inglese **George Boole** e, poi, il tedesco **Gottlob Frege**, anche se non vanno dimenticati i contributi di molti altri come A. De Morgan, C.S. Peirce, W.S. Jevons, ecc.

Uno dei risultati più rilevanti del loro lavoro fu quello di definire una "**macchina logica astratta**" capace di ricavare algoritmicamente nuove formule logiche a partire da un insieme di premesse senza far intervenire l'intelligenza di chi opera, ma operando solo in termini meccanici sulla struttura sintattica delle formule logiche:

- allo stesso modo in cui **in algebra si manipola un'equazione o un espressione algebrica** per ricavarne un'altra più semplice o più utile,
- anche **nella logica formale si opera con manipolazioni sintattiche**; nella macchina logica computare significa derivare sintatticamente e Boole e Frege hanno fatto vedere come realizzare ciò sulle proposizioni logiche.

Inventare la macchina logica

La Characteristica Universalis di Leibniz

Tra i primi pensatori dell'Età Moderna ad immaginare in qualche modo uno strumento capace di generare automaticamente proposizioni vere va annoverato il grande filosofo e matematico tedesco **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 - 1716).

Leibniz viene generalmente accreditato, assieme a Isaac Newton, dei maggiori contributi alla creazione del moderno calcolo infinitesimale.

Leibniz tentò di realizzare un sistema logico-matematico, dove il pensiero razionale stesso potesse essere ridotto a una sorta di calcolo.

> *Da quando mi sono convinto che la geometria e la meccanica sono diventate completamente analitiche, ho pensato di estendere il calcolo a materie alle quali, finora, si era ritenuto che non potesse essere esteso in alcun modo. Io chiamo qui "calcolo" qualunque notazione che rappresenti il ragionamento, quand'anche non avesse alcun rapporto con i numeri.*

Il progetto di Leibniz varie fasi:

- era necessario, innanzi tutto, compilare una "**enciclopedia dei concetti**" (o "dizionario") che raccogliesse tutto il sapere distillato nel corso dei secoli;
- a questo punto era necessario **selezionare un numero limitato di idee più semplici** (una sorta di collezione di mattoni basilari dei pensieri umani) con cui fosse possibile poi comporre tutti gli altri concetti complessi;
- occorreva poi definire una lingua ***characteristica universalis***, cioè di un "alfabeto di simboli" (che egli chiama *characteres*) dei pensieri umani in cui ogni concetto basilare fosse rappresentato mediante un unico simbolo;
- **le idee più complesse avrebbero dovuto derivare da quelle di base mediante una combinazione** uniforme e sistematica secondo regole sintattiche precise, analoga a quella adottata nella costruzione delle espressioni matematiche;
- infine, sarebbe stato possibile **formulare una serie di regole deduttive** (inferenze) che avrebbero permesso di condurre i ragionamenti umani in forma di calcolo, che Leibniz indicava come *calculus ratiocinator*.

Mentre i primi due punti del suo progetto rimasero del tutto inattuati, per quello che riguarda gli altri punti egli

elaborò numerosi appunti senza però giungere ad un lavoro conclusivo e sistematico; per questa ragione esistono diverse versioni di calcolo logico, che riflettono i suoi sforzi compiuti nel corso degli anni.

Alcuni esempi di quanto scriveva sono illustrati qui di seguito (*Saggio di calcolo logico*):

Definizione 1. – Identici o coincidenti sono quei termini dei quali l'uno può essere sostituito ovunque in luogo dell'altro, senza alterare la verità. Per esempio, "triangolo" e "trilatero"; infatti in tutte le proposizioni dimostrate da Euclide circa il "triangolo", vi si può sostituire "trilatero" (e viceversa), senza che venga alterata la verità. […]

Assioma 1. – B ⊕ N ∞ N ⊕ B, o la trasposizione [commutatività rispetto a ⊕] non produce qui alcun cambiamento. […]

Assioma 2. – A ⊕ A ∞ A. Se non viene aggiunto nulla di nuovo, non risulta neppure alcunché di nuovo, ossia la semplice ripetizione non produce nessun mutamento (poiché sebbene 4 nummi ed altri 4 nummi facciano 8 nummi, questo non avviene per 4 nummi, se i medesimi 4 nummi vengono contati una seconda volta). […]

Prop. 5. Se A è in B, e se A ∞ C, anche C è in B. Un termine coincidente con uno che è in un terzo termine, è anch'esso nel terzo termine. Infatti se nella proposizione "A è in B" (vera per ipotesi) sostituiamo

C in luogo di A (per la definizione 1 di termini coincidenti, giacché A ∞ C per ipotesi), risulta che C è in B.

dove il simbolo ⊕ (che egli chiama *composizione* o *addizione reale*) indica una sorta di operazione di unione di insiemi e il simbolo ∞ corrisponde al nostro simbolo di uguaglianza.

Leibniz, a buona ragione, può essere considerato il precursore più insigne della logica matematica, ma non seppe tirare le conclusioni delle sue ricerche pionieristiche: con una maggiore sistematicità avrebbe potuto anticipare la logica moderna di un oltre secolo mezzo!

L’algebrizzazione della logica di Boole

Come abbiamo detto, **per secoli la logica era rimasta terreno di applicazione soprattutto dei filosofi** e nella maggior parte dei casi gli studi effettuati avevano portato a considerazione che mescolavano scarsi aspetti matematici a numerose considerazioni metafisiche o epistemiche.

Nella prima metà dell'Ottocento avvenne invece un cambiamento considerevole e per la prima volta questo settore venne indagato sistematicamente con gli strumenti della matematica. **Il principale artefice di questa rivoluzionaria trasformazione della logica fu George Boole**, la cui **algebra** non sarà la semplice trascrizione simbolica del sillogismo aristotelico, ma renderà evidente quanto sia più ampio il mondo della logica.

Egli riuscì a mostrare che, **considerando solo gli aspetti linguistici e tralasciando gli aspetti metafisici**, **poteva essere data alla logica classica una dimensione matematica**, compiendo quel processo di formalizzazione che non era riuscito a Leibniz. Scriveva:

> *Se vogliamo attenerci ai principi di una classificazione vera, non dobbiamo più associare logica e metafisica, ma logica e matematica.*

Boole analizzò per la prima volta un linguaggio che ammetteva tra le possibili interpretazioni il **calcolo proposizionale**, che rappresenta oggi un'importante parte della logica matematica.

Occorre comunque sottolineare che il **calcolo proposizionale**, non è una “invenzione” attribuibile unicamente a Boole, poiché tanti altri personaggi parteciparono alla sistemazione del linguaggio booleano, tra cui William Hamilton (da non confondere con l'inventore dei quaternioni), Augustus de Morgan, Stanley Jevons, John Venn, Charles Peirce, ecc.

Il simbolismo di Boole è mutuato dal linguaggio matematico dell'algebra. Egli scriveva:

Proposizione 1. Tutte le operazioni del linguaggio, in quanto strumento del ragionamento, possono essere condotte per mezzo di un sistema di segni composto dai seguenti simboli:

Simboli letterali, come x, y, ecc., che rappresentano cose in quanto oggetto dei nostri atti di concezione.

Segni di operazioni, come +, –, ×, che stanno per quelle operazioni della mente per mezzo delle quali le concezioni delle cose vengono combinate o scomposte in modo da formare nuove concezioni, che contengono gli stessi elementi.

Il segno di identità: =.

E nel loro uso questi simboli logici sono sottoposti a leggi definite, che in parte concordano con le leggi dei simboli algebrici e in parte ne differiscono.

Le regole di calcolo erano prese in presti dall'algebra e esplicitamente o implicitamente Boole assume le seguenti proprietà:

$x \cdot y = y \cdot x$ proprietà commutativa

$x + y = y + x$ proprietà commutativa

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ proprietà distributiva

$x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$ proprietà distributiva

se $x = y$ leggi di sostitutività

$zx = zy$

$z + x = z + y$

$x - z = y - z$

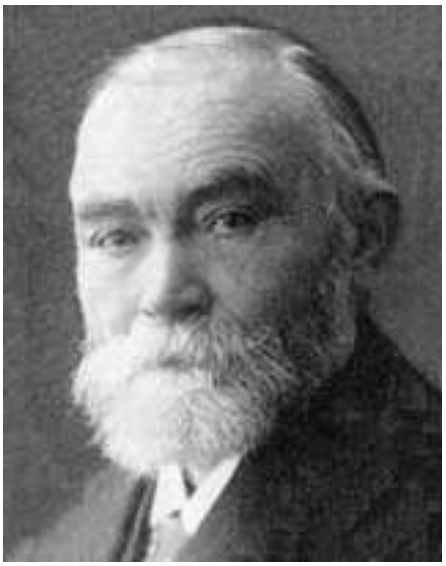
$x^2 = x$ legge degli indici

dove prodotto e somma corrispondono rispettivamente a qualcosa di simile agli odierni congiunzione e disgiunzione.

Tutte queste leggi coincidono con quelle della comune algebra (numerica), tranne la legge degli indici (*index law*): questa è proprio peculiare del calcolo booleano. Secondo Boole, su questi "leggi del pensiero" si doveva basare sostanzialmente il processo inferenziale, che può essere condotto in termini puramente sintattici.

Il lavoro di Boole attirò l'attenzione (e anche le critiche) di vari matematici e filosofi del tempo portando in breve tempo ad un notevole sviluppo della logica matematica.

L’ideografia di Frege

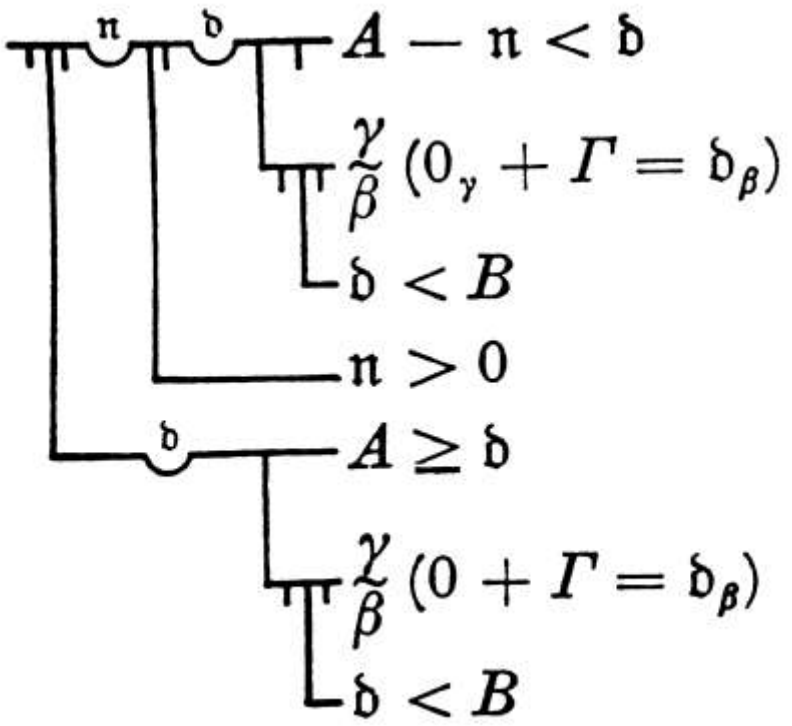


Gottlob Frege (1848 - 1925) è considerato il fondatore della logica matematica moderna.

Frege era rimasto affascinato dall'idea leibniziana di un **calculus philosophicus**, che il grande filosofo tedesco aveva descritto due secoli. E proprio seguendo il sogno leibniziano di un **linguaggio universale cercò di costruire un linguaggio rigoroso, «in formule di pensiero puro», che permettesse il «calcolo logico»** e che potesse costituirsi come fondamento di tutti i calcoli particolari e specifici delle varie scienze (aritmetici, geometrici, ecc).

Rispetto al lavoro di Boole, limitato allo studio calcolo proposizionale, egli raffinò ed estese il sistema considerando anche predicati, funzioni e quantificatori: di fatto introdusse quello che oggi è noto come **calcolo dei predicati del secondo ordine**.

Frege denominò il proprio sistema ***Ideografia*** (*Begriffsschrift)* e lo descrisse in un’opera pubblicata per la prima volta nel 1879.



Frege aveva creato quella **characteristica universalis**

- che sarebbe diventato un misto di formule algebriche e ideogrammi e, inoltre,
- mostrò che era possibile superare i confini della logica proposizionale e sillogistica, dai quali neppure Boole era uscito, sviluppando un sistema di assiomi e regole per la logica predicativa.

Nel 1884 Frege scrisse ***I Fondamenti dell'Aritmetica***, in cui forniva una prima formalizzazione dell'aritmetica.

I due volumi dei ***Principi dell'Aritmetica***, pubblicati nel 1893 e 1903, rappresentarono il primo serio tentativo di dare una formalizzazione assiomatica dell'aritmetica.

Dai tempi degli *Elementi* di Euclide, con cui aveva formalizzato la geometria, nessun altro matematico aveva osato tanto con un formalismo così rigoroso e puro.

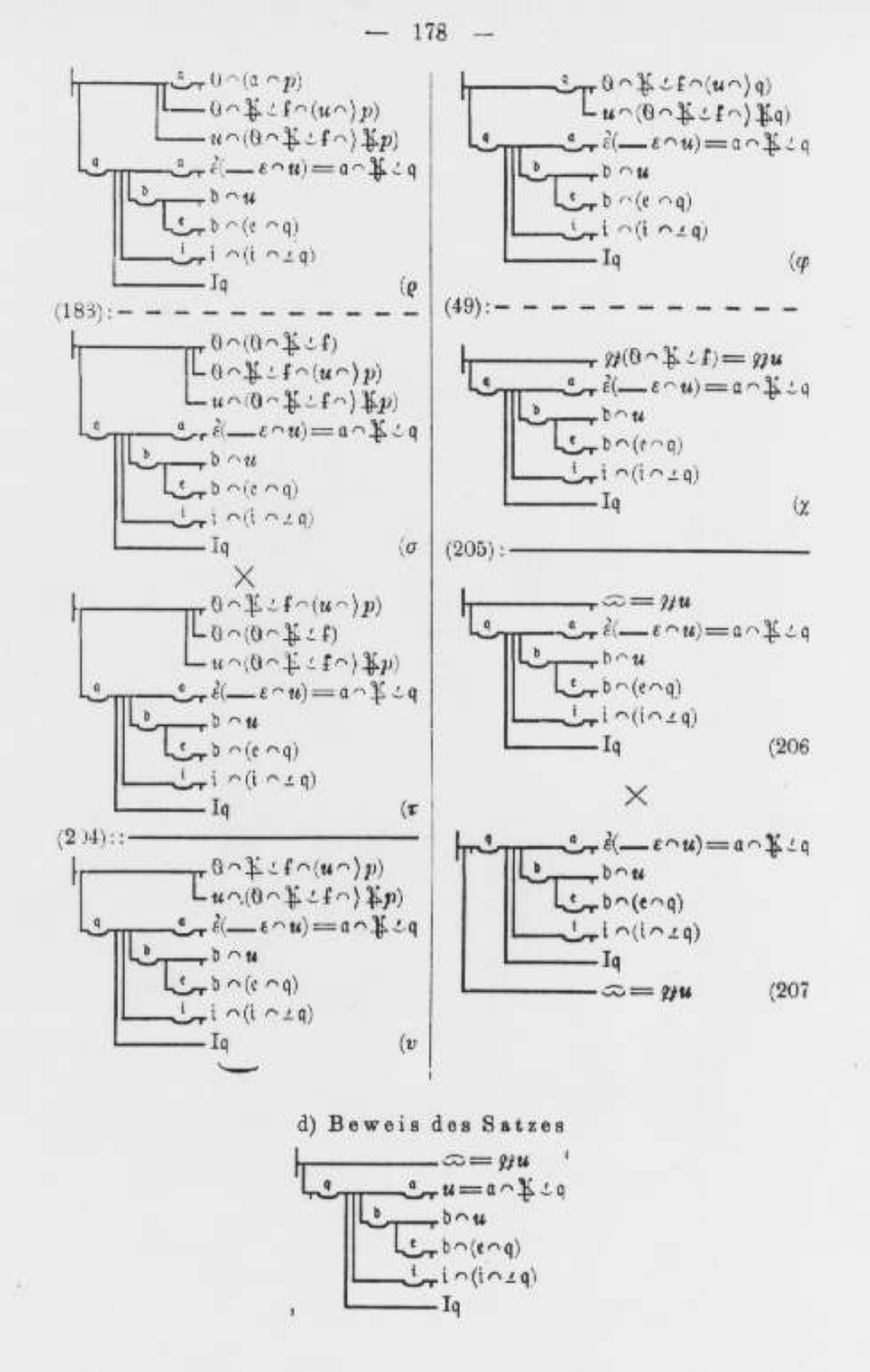
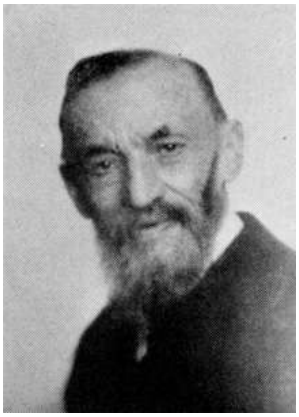


Fig. Friedrich Ludwig Gottlob Frege, Grundgesetze der Arithmetik, volume 2, H. Pohle, Jena, 1903, end of section 143 "Aufbau," page 178.

La notazione logica di Frege non era di facile di lettura, ma successivamente altri matematici, tra cui l'italiano **Giuseppe Peano**, ne migliorarono il sistema di scrittura fino a pervenire a quello attuale.



$$\cdot 1 \quad 0 \in \mathbf{N}_0$$

$$\cdot 2 \quad n \in \mathbf{N}_0 . \supset . n+ \in \mathbf{N}_0$$

$$\cdot 3 \quad s \in \mathrm{Cls} . 0 \in s : n \in s . \supset_n . n+ \in s :\supset . \mathbf{N}_0 \supset s$$ Induct

$$\cdot 4 \quad n,b \in \mathbf{N}_0 . n+ = b+ . \supset . n = b$$

$$\cdot 5 \quad n \in \mathbf{N}_0 . \supset . n+ \neq 0$$

Il programma di Hilbert

Paradossi e crisi dei fondamenti della matematica

Nella seconda metà dell'Ottocento diversi matematici si posero **il problema di dare solide fondamenta alla matematica** con maggiore cura di quanto non fosse stato fatto in precedenza, ma **diversi paradossi misero in difficoltà questo progetto evidenziando quanto fosse problematico il rigore matematico**.

In particolare, dopo che Cantor ebbe aperto la strada allo studio degli insiemi infiniti, diversi matematici cominciarono ad approfondire il tema dell'infinito da vari punti di vista e ben presto incontrarono alcune sorprese.

Uno dei primi paradossi fu quello di **Cesare Burali-Forti**, nel 1897, che dimostra che il processo di costruzione dell'insieme di tutti i numeri ordinali porta ad una contraddizione.

Paradosso di Russell, 1902.

Proprio mentre Frege si accingeva a scrivere il secondo volume della sua opera sui principi dell'aritmetica, Bertrand Russell, comunicò a Frege che il suo sistema permetteva di derivare una contraddizione.

L'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi, appartiene o no a se stesso?

- **Se si, allora è uno degli insiemi che non appartengono a se stessi, e quindi non può appartenere alla loro collezione, cioè a se stesso;**
- **se no, allora è uno degli insiemi che non appartengono a se stessi, e dunque appartiene alla loro collezione, cioè a se stesso**.

Questo paradosso viene spesso divulgato nella forma del **paradosso del barbiere**: "In un villaggio c'è un unico barbiere. Il barbiere rade tutti (e soli) gli uomini che non si radono da soli. Il barbiere rade se stesso?"

Un altro paradosso relativo alla definibilità dei numeri reali venne trovato da matematico francese **Jules Antoine Richard** nel 1905.

… e ancora paradosso di Berry (1906), paradosso di Grelling (1908), …

Il programma di Hilbert

La **crisi dei fondamenti matematici**, innescata dalla scoperta di vari paradossi e dallo studio di funzioni matematiche "patologiche" ponevano la necessità non solo di ridefinire i concetti matematici portanti con un maggiore rigore ma esigevano anche di **capire meglio quelle forme di ragionamento** impiegate per millenni ma ora sotto accusa per i paradossi a cui davano origine.

Il famoso matematico tedesco David Hilbert (1862-1943) propose di costruire queste basi facendo ricorso

- alla **logica** studiata da Frege per costruire assiomatizzazioni dei vari settori della matematica
- alla **teoria degli insiemi (infiniti)** emersa dal lavoro di Cantor

L’assiomatizzazione della matematica

Agli inizi del 1900, David Hilbert lanciò come programma di ricerca l'**idea alquanto ambiziosa di formalizzare la matematica** individuando sistemi assiomatici da cui poter derivare in modo "meccanico" tutti i teoremi della matematica.

Un **sistema assiomatico** rappresenta una sorta di teoria che contiene tutti i principi primi da cui partire per effettuare ragionamenti in un dato settore della matematica.

La parola "**meccanico**" si riferisce al fatto che la derivazione dei teoremi non deve far riferimento a procedimenti intuitivi o all'intelligenza del matematico, ma deve seguire dall’applicazione di regole (dette *regole di inferenza*) semplici e prive di ambiguità come, ad esempio, le regole di gioco degli scacchi.

Un primo importante esempio di progetto di assiomatizzazione è costituito dalla “rivisitazione” degli Elementi di Euclide che portò ad un’assiomatizzazione completa della geometria euclidea nel famoso lavoro ***Grundlagen der Geometrie*** del 1899.

Secondo Hilbert, ogni problema (matematico) avrebbe potuto trovare una risposta (affermativa o negativa) a partire da un opportuno sistema assiomatico applicando le regole di inferenza:

> **"Ogni problema matematico deve essere necessariamente suscettibile di una chiarificazione esatta, o nella forma di una risposta effettiva alla domanda sollevata, o attraverso la dimostrazione dell'impossibilità della sua soluzione e quindi del necessario fallimento di tutti i tentativi… Per quanto inaccessibili possano sembrarci questi problemi e per quanto si possa rimanere scoraggiati di fronte a essi, abbiamo, nondimeno, la ferma convinzione che la loro soluzione deve conseguire da un numero finito di processi puramente logici …".**

Attorno al 1910 iniziarono i primi tentativi per dare una risposta al programma di Hilbert e nei primi anni ’30 arrivarono le risposte più “interessanti” in merito al progetto di Hilbert.

I Principia Mathematica di Russell e Whitehead

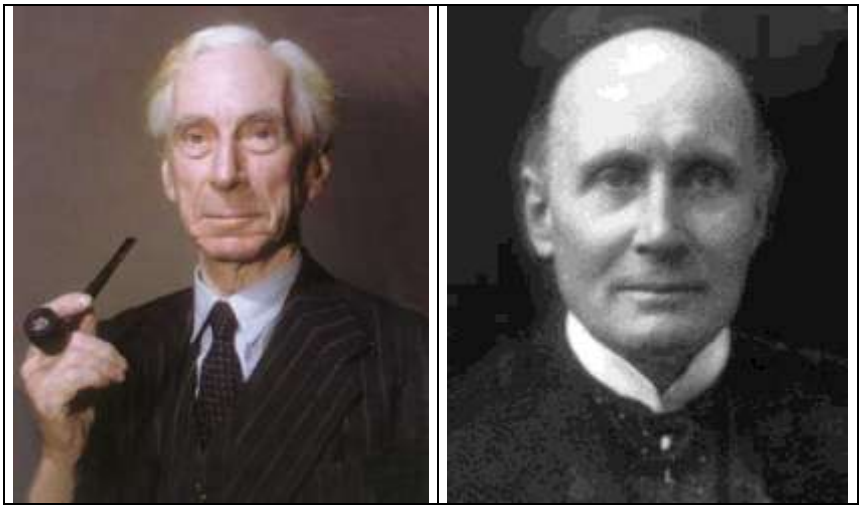
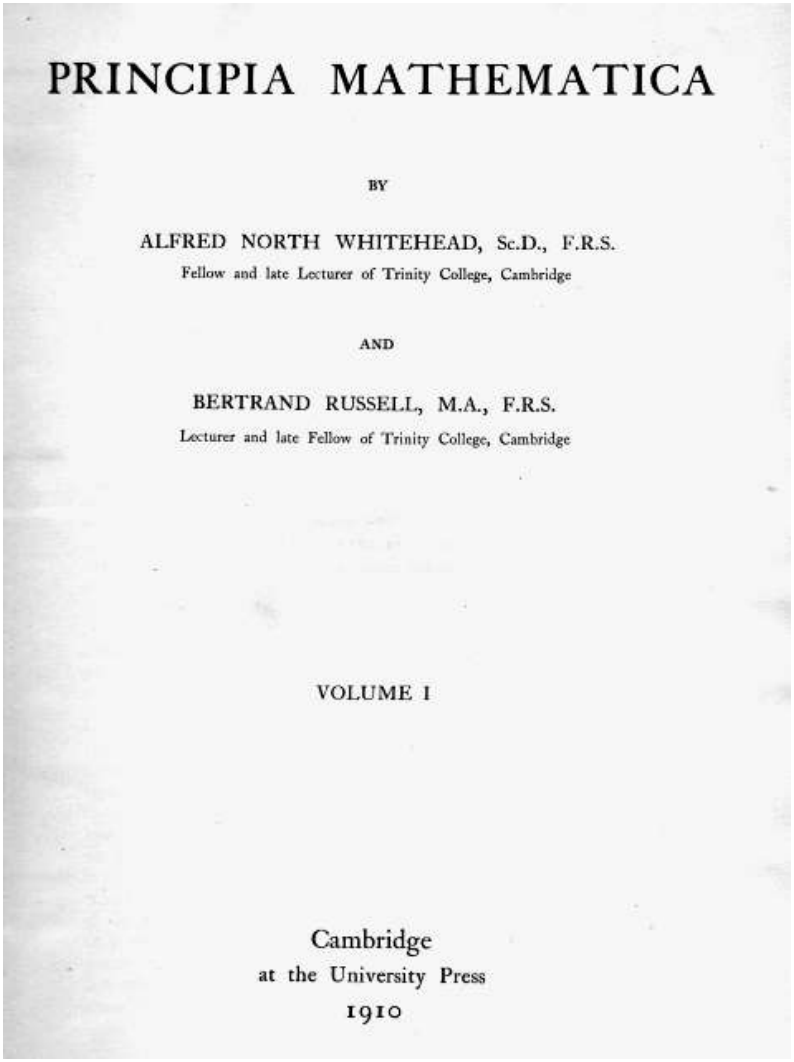


Fig. Bertrand Russell (a sinistra) e Alfred North Whitehead

Il programma di Hilbert per la realizzazione di un sistema logico formale da cui derivare tutti i teoremi della matematica produsse come uno dei risultati più importanti la pubblicazione (1910-13) dei ***Principia Mathematica*** da parte dei logici-matematici inglesi **Bertrand Russell e Alfred North Whitehead**.

L'opera di Russell e Whitehead partiva dal precedente lavoro del logico tedesco G. Frege in cui Russell stesso aveva trovato un aspetto contraddittorio. Questa opera rappresentò il più elaborato tentativo mai fatto prima di allora di sviluppare le nozioni fondamentali della matematica (aritmetica) a partire da un insieme ben definito di assiomi.



PRINCIPIA MATHEMATICA

BY

ALFRED NORTH WHITEHEAD, Sc.D., F.R.S.
Fellow and late Lecturer of Trinity College, Cambridge

AND

BERTRAND RUSSELL, M.A., F.R.S.
Lecturer and late Fellow of Trinity College, Cambridge

VOLUME I

Cambridge
at the University Press
1910

Fig. Copertina del libro di Russell e Whitehead.

AUDIO

Audio 1: voce di Bertrand Russell in occasione del conferimento del Premio Nobel: Desire [da http://setis.library.usyd.edu.au/stanford/archives/win2002/entries/russell/russell-soundclips.html]

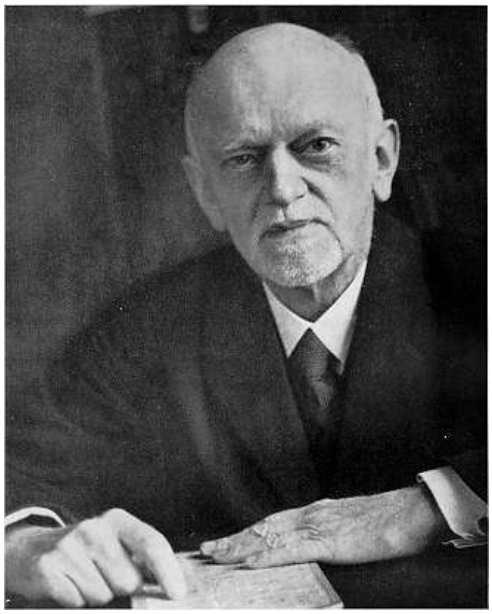
VIDEO

Video 1: Bertrand Russell. [da http://www.britannica.com/nobel/ind_av.html]

LINK

http://plato.stanford.edu/entries/principia-mathematica/

Le domande di Hilbert



Per poter "certificare" in modo indiscutibile il valore del lavoro di Russell e Whitehead era però necessario provarne la consistenza e la completezza.

Pertanto Hilbert, di fronte a questo lavoro, pose come ulteriore obiettivo quello di provarne la completezza e la non contraddittorietà.

Questo lavoro fu affrontato dai migliori logici matematici degli anni ’20 e portò nel 1931 a conclusioni molto diverse da quelle che Hilbert si aspettava.

Altre critiche di metodo poste da matematici come **Brouwer** richiedevano di capire quali forme di ragionamento potessero essere legittimamente impiegate nelle dimostrazioni matematiche: ad esempio **Brouwer metteva in discussione le dimostrazioni esistenziali impiegate nel corso di tutto l'Ottocento e metteva in dubbio la validità di principi logici come ad esempio il principio del terzo escluso**.

Le critiche sollevate da Brouwer spingevano inoltre i matematici a trovare per i problemi matematici soluzioni costruttive che potessero essere realizzate concretamente in un numero finito passi.

Tra l'inizio del 1900 e la fine degli anni '20 Hilbert pose diverse questioni logiche al fine di evitare quei paradossi logici che erano emersi proprio in quegli anni e per frenare le critiche ai metodi della matematica di Brouwer.

Nel 1928, al Congresso Internazionale dei Matematici, a Bologna pose in modo molto chiaro **tre questioni**:

- **La matematica è completa**? cioè ogni enunciato che produce può essere dimostrato a partire dagli assiomi iniziali mediante opportune regole di inferenza?

- **La matematica è consistente (coerente)**? cioè è possibile dimostrare che, ad esempio, l'enunciato 2 + 2 = 5 non può e non potrà mai essere dimostrato attraverso una procedura valida?

- **La matematica è decidibile**? cioè dato un sistema assiomatico e una proposizione scelta arbitrariamente, esiste una procedura che consenta di determinare se tale proposizione sia vera o falsa all'interno del sistema (questo problema venne denominato **Entscheidungsproblem** – **problema della decisione**)?

In cuor suo Hilbert era convinto che la risposta a tutte tre le domande fosse affermativa e che fosse solo questione di studiare bene le tre questioni per trovare la loro soluzione.

Gödel: i limiti della macchina logica

Diversi furono i matematici e logici che si cimentarono sui problemi posti da Hilbert riguardo la consistenza e completezza del sistema logico-formale realizzato da Russell e Whitehead.

La risposta alle prime due domande giunse nel 1931 grazie al geniale lavoro del logico austriaco **Kurt Gödel** (1906-1978) con il suo famoso ***teorema di incompletezza***.

Gödel affrontando il problema in termini puramente logici dimostrò

- non solo che **il sistema di Russell-Whitehead era incompleto**, nel senso che esistevano proposizioni per le quali non era possibile dimostrare né la verità né la falsità,
- ma che **qualunque altro sistema formale sarebbe risultato parimenti incompleto** a causa di un'incompletezza di fondo caratterizzante qualunque sistema formale logico (sufficientemente espressivo).

Gödel riuscì a mostrare anche che nel sistema dell'aritmetica non è possibile formulare un enunciato logico che esprima la correttezza del sistema, conclusione che costituisce il **secondo teorema di Gödel**:

- **Nessun sistema coerente può essere utilizzato per dimostrare la sua stessa coerenza.**

Questo risultato risponde negativamente alla seconda questione posta da Hilbert al Congresso di Bologna: per riuscire a dimostrare la coerenza dell'aritmetica sono necessari metodi più potenti che non quelli semplicemente finitistici, ipotizzati da Hilbert.

Per giungere a questo risultato Gödel sfruttò in modo alquanto sofisticato un vecchio paradosso, noto come **paradosso del mentitore**: “Questa frase è falsa”.

Egli modificò questo paradosso nella forma “**Questo teorema non è dimostrabile**” e mostrò che era possibile codificare opportunamente questa espressione in una formula di un sistema logico formale (purché sufficientemente espressivo) dando luogo all’incompletezza del sistema stesso.

Il lavoro di Gödel mostrò che in matematica la derivazione di nuovi teoremi non è meccanizzabile se non in modo incompleto, non importa quanto sofisticato e complesso sia il sistema (logico) progettato.

Nonostante i risultati negativi rispetto alle speranze di Hilbert, il lavoro di Gödel e di altri studiosi fu comunque essenziale per tutto il settore della logica matematica e dei fondamenti stessi della matematica… inoltre, indirettamente diede inizio alla teoria della computabilità.

LINK

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

http://www.edinformatics.com/great_thinkers/godel.htm

6 La macchina universale

Paolo Giangrandi
paolo.giangrandi@uniud.it

Università degli Studi di Udine

28/04/2010

L’Entscheidungsproblem

La terza domanda posta da Hilbert al Congresso di Bologna del 1928 era l’“***Entscheidungsproblem***” (in tedesco “problema della decisione”) e suonava così:

> ***trovare un algoritmo (“procedura meccanica”) che sia in grado di decidere per una proposizione logica del primo ordine se questa è sempre vera (a prescindere da qualunque interpretazione semantica)***.

Per la storia dell'informatica, è proprio la ricerca di una procedura ben definita eseguibile in un numero finito di passi a costituire la parte più interessante di questo problema.

In qualche modo, si può dire che **questo problema traeva origine addirittura dai tempi di Gottfried Leibniz**, il quale immaginava di poter realizzare una macchina capace di manipolare simboli matematici in modo da poter stabilire la verità delle proposizioni matematiche. Egli aveva messo in evidenza che il primo passo importante per fare una cosa del genere richiedeva di inventare un opportuno formalismo logico.

I lavori successivi nel campo della logica, portarono in effetti ad introdurre un linguaggio logico sufficiente preciso e potente grazie ai lavori di Boole e, come abbiamo visto, soprattutto di Frege.

1936: due risposte per lo stesso problema

A metà degli anni ’30, lo statunitense **Alonzo Church** e l’inglese **Alan Turing** affrontarono in modo indipendentemente il terzo problema di Hilbert (l’*Entscheidungsproblem*).

Nel 1936, la conclusione a cui giunsero entrambi quasi contemporaneamente (Church precedette Turing di pochi mesi) fu che **era impossibile realizzare un algoritmo capace di decidere se una qualunque proposizione dell’aritmetica era vera o falsa**.

Per poter rispondere al problema in modo rigoroso, ovviamente era necessario precisare in modo formale il concetto stesso di “algoritmo”.

- Alonzo Church, con il contributo di Stephen Kleene, propose un formalismo noto come ***lambda calcolo***,
- mentre Alan Turing propose delle macchine astratte (oggi note come **macchine di Turing**).

Tutte due i lavori sfruttavano la tecnica di enumerazione introdotte da Kurt Gödel pochi anni prima (derivata a sua volta dal lavoro di Cantor).

Nonostante i risultati negativi, il lavoro di Church e in particolar modo quello di Turing (descritto nel famoso articolo ***On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem***, 1936) ebbero conseguenze importantissime per la storia dell'informatica e diedero il via alla teoria della computabilità.

Il lambda calcolo di Church e Kleene

Fig. Alonzo Church

Nell'articolo **An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory** Church introduceva il lambda calcolo un particolare formalismo per esprimere in modo rigoroso funzioni matematiche:

$(\lambda\, x\, y.\ y\, x)\ (\lambda\, x.\ y)$	$(\lambda\, f.\ f\, 3)(\lambda\, x.\ x + 2)$	$\lambda\, f\, x.\ f\,(f\,(f\, x))$

Fig. Espressioni nel lambda calcolo.

Nel lavoro Church affermava poi che ogni espressione del lambda calcolo corrispondeva ad un procedimento di calcolo ben definito (algoritmo) dando così una definizione rigorosa di effettiva calcolabilità (funzione computabile) secondo quanto richiesto dal Hilbert.

Ogni espressione poteva essere valutata (calcolata) seguendo alcune regole sintattiche ben precise.

Mediante il lambda calcolo Church mostrava che le proposizioni dell'aritmetica potevano essere tradotte in questo formalismo.

Infine, Church faceva vedere che non era possibile trovare una funzione computabile (espressa nel lambda calcolo stesso) che per due date espressioni del lambda calcolo potesse decidere se queste erano equivalenti oppure no. Proprio questa indecidibilità determinava la risposta negativa alla terza domanda di Hilbert.

LINK

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Lambda_calculus

Turing e l’astrazione del processo di calcolo

Alan Turing cominciò a lavorare alle questioni proposte da Hilbert nei primi anni '30 e, diversamente da Gödel e da Church, **non utilizzò un approccio puramente di tipo logico**.

Ricercando una definizione il più possibile precisa e generale del **concetto di "procedura di calcolo"**, Turing iniziò ad analizzare tutto ciò che un essere umano faceva durante l'esecuzione di un **processo di calcolo cercando di individuare gli elementi essenziali e scartando tutti quelli irrilevanti**.

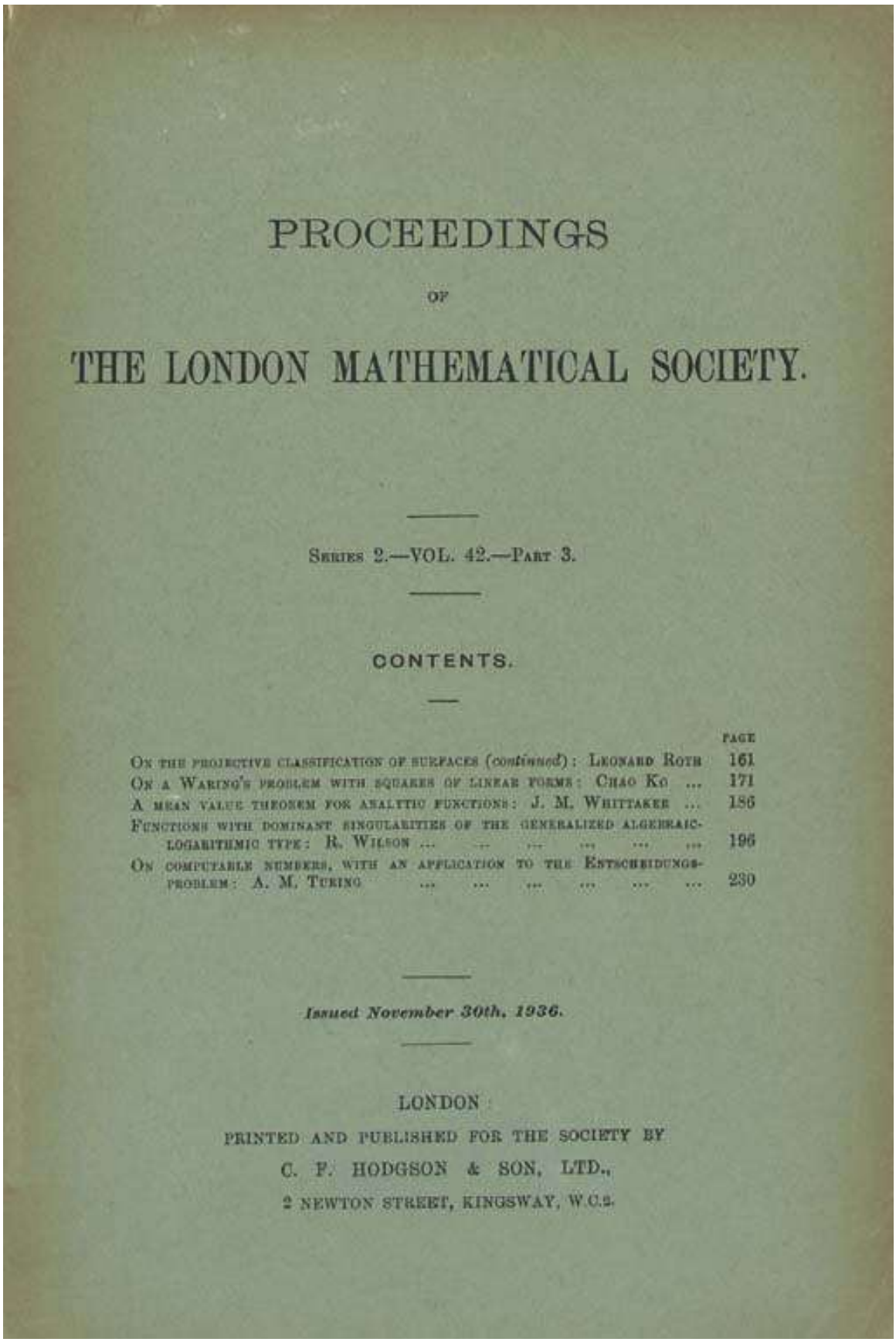
- la persona utilizza fogli di carta come memoria;
- la persona legge dati sul foglio di carta;
- la persona scrive dati a partire da altri dati, eventualmente cancellando dati precedenti;
- la persona decide cosa scrivere in base a ciò che è presente sul foglio e al proprio stato mentale.

Turing ritiene che l'**analisi così condotta sul processo di calcolo abbia colto tutti gli elementi essenziali** e che quindi qualunque procedura di calcolo (formalizzabile) possa essere ricondotta al suo schema:

> ***"It is my contention that these operations include all those which are used in the computation of a number"***

In questo modo, egli inventò la cosiddetta **macchina di Turing** (che egli chiamava **A-machine**), che costituisce un modello di calcolatore molto semplice ma al tempo stesso sufficientemente potente per studiare le proprietà matematiche di ciò che è calcolabile.

Turing concepì **questo dispositivo come modello ideale di calcolatore** per studiarne le caratteristiche in termini teorici e non lo costruì fisicamente come dispositivo fisico, anche se sarebbe stato abbastanza semplice realizzarlo.



PROCEEDINGS

OF

THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY.

SERIES 2.—VOL. 42.—PART 3.

CONTENTS.

	PAGE
ON THE PROJECTIVE CLASSIFICATION OF SURFACES (*continued*): LEONARD ROTH	161
ON A WARING'S PROBLEM WITH SQUARES OF LINEAR FORMS: CHAO KO ...	171
A MEAN VALUE THEOREM FOR ANALYTIC FUNCTIONS: J. M. WHITTAKER ...	186
FUNCTIONS WITH DOMINANT SINGULARITIES OF THE GENERALIZED ALGEBRAIC-LOGARITHMIC TYPE: R. WILSON	196
ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTSCHEIDUNGS-PROBLEM: A. M. TURING	230

Issued November 30th, 1936.

LONDON

PRINTED AND PUBLISHED FOR THE SOCIETY BY

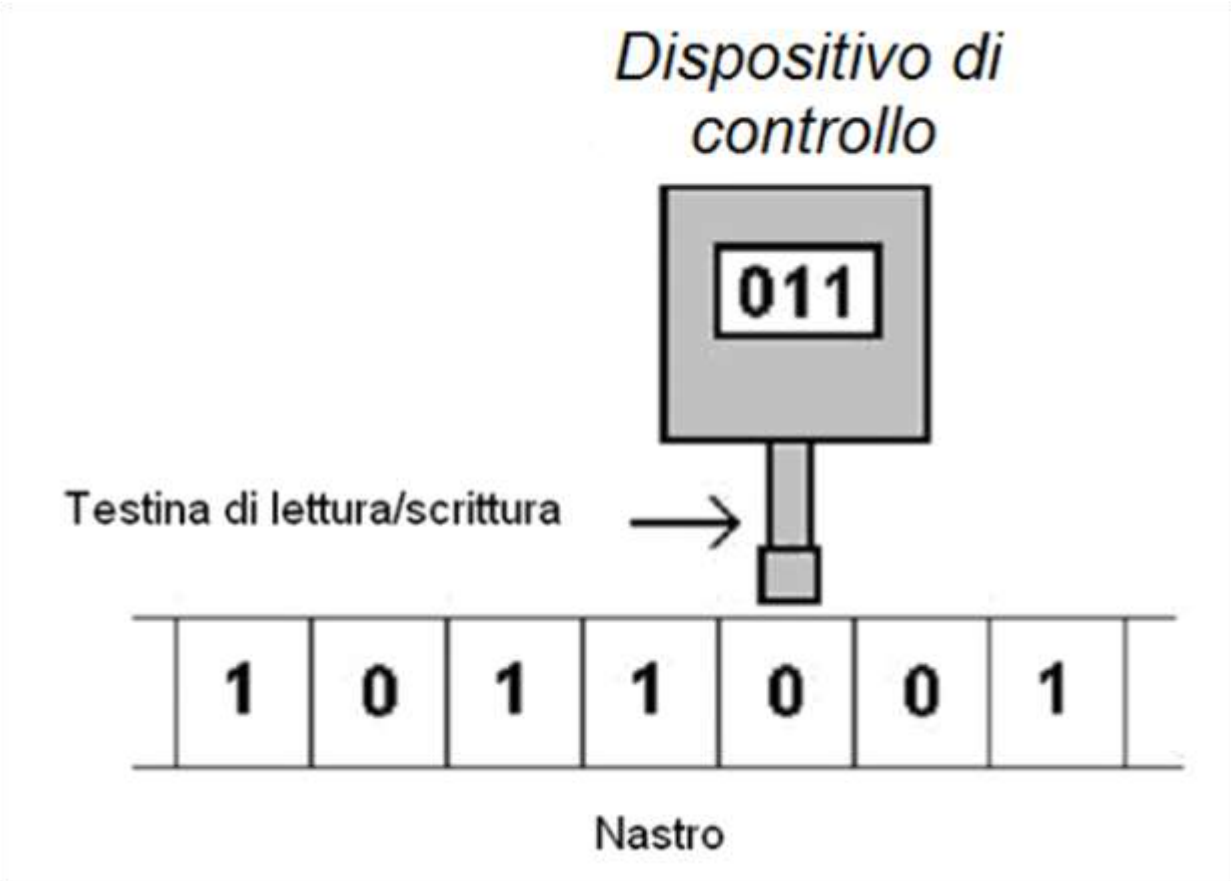
C. F. HODGSON & SON, LTD.,

2 NEWTON STREET, KINGSWAY, W.C.2.

Fig. Prima pagina degli atti che contengono il famoso articolo di Turing del 1936.

La macchina di Turing (MT) è costituita

- da un **nastro**, che gioca il ruolo del dispositivo di memoria e viene supposto illimitato in entrambe le direzioni; il nastro è suddiviso in celle tutte uguali e ognuna di esse può contenere un simbolo.
- una **testina** che permette di leggere e scrivere sulle celle del nastro; in particolare la testina esplora una cella alla volta, quella cioè che a un dato istante viene a trovarsi in sua corrispondenza. **Il simbolo letto dalla testina può essere cancellato e sostituito con un nuovo simbolo**.
- un **dispositivo di controllo** che regola il movimento della testina rispetto al nastro, spostandola ogni volta di una cella verso sinistra o verso destra secondo i casi. **Il dispositivo di controllo è dotato di una memoria interna costituita da un certo numero finito di stati**.



Le informazioni che si trovano sul nastro all'inizio della computazione costituiscono i **dati in ingresso**, mentre quelle presenti sul nastro all'arresto della macchina costituiscono il **risultato della computazione**.

Il **comportamento della MT** dipende

- dal simbolo letto sul nastro mediante la testina, e
- dallo stato interno in cui si trova il dispositivo di controllo in un dato momento.

Il comportamento specifico della MT è descritto da una **matrice di controllo** (o **tabella di controllo**) che indica per ogni stato in cui si può trovare la MT e per ogni simbolo che può essere letto dalla MT il passo successivo da compiere.

Un **passo di computazione** consiste nello scrivere un nuovo simbolo nella cella correntemente letta dalla testina, nel portarsi in un dato stato e nello spostarsi a destra o a sinistra.

Qui di seguito possiamo vedere **un esempio di macchina di Turing che esegue la differenza tra due numeri espressi in forma unaria**: ad esempio il numero 6 viene rappresentato mediante una stringa di 6 “1”.

All’inizio sul nastro sono presenti i dati di ingresso nella forma "x-y=", dove x rappresenta il minuendo e y il sottraendo (ad esempio 6-3 viene rappresentato come "111111-111=".

I simboli che possono essere usati sul nastro sono:

"1", " " (bianco), "-" (meno), e "=".

La macchina impiega complessivamente 5 stati, di cui uno è solo per indicare l’arresto della macchina. Qui vediamo la **matrice di controllo**:

	“ “	**1**	**-**	**=**
a	(a , " ", des)	(a , "1", des)	(a , "-", des)	(b , " ", sin)
b		(c , "=", sin)	(Halt, " ", sin)	
c		(c , "1", sin)	(d , "-", sin)	
d	(d , " ", sin)	(a , " ", des)		
Halt				

Fig. Esempio di matrice di controllo di una macchina di Turing.

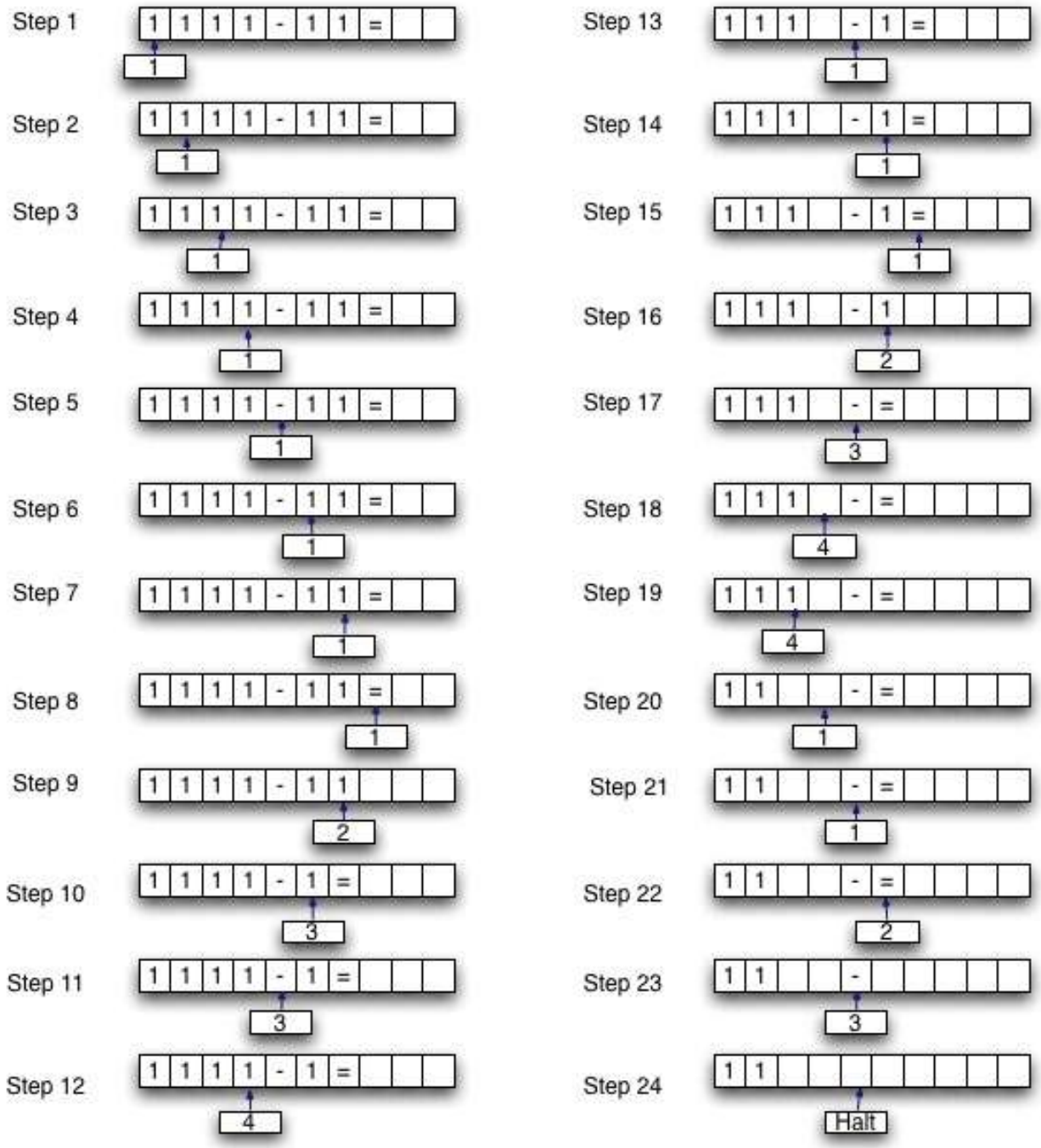


Fig. Esempio di computazione di una macchina di Turing.

LINK

http://www.cs.umass.edu/~immerman/cs601/turingReference.html

http://www.alanturing.net/turing_archive/archive/index/archiveindex.html

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

http://www.turing.org.uk/turing/

http://www.cs.swarthmore.edu/~dylan/Turing.html

http://www.alanturing.net/turing_archive/index.html

La macchina di Turing universale

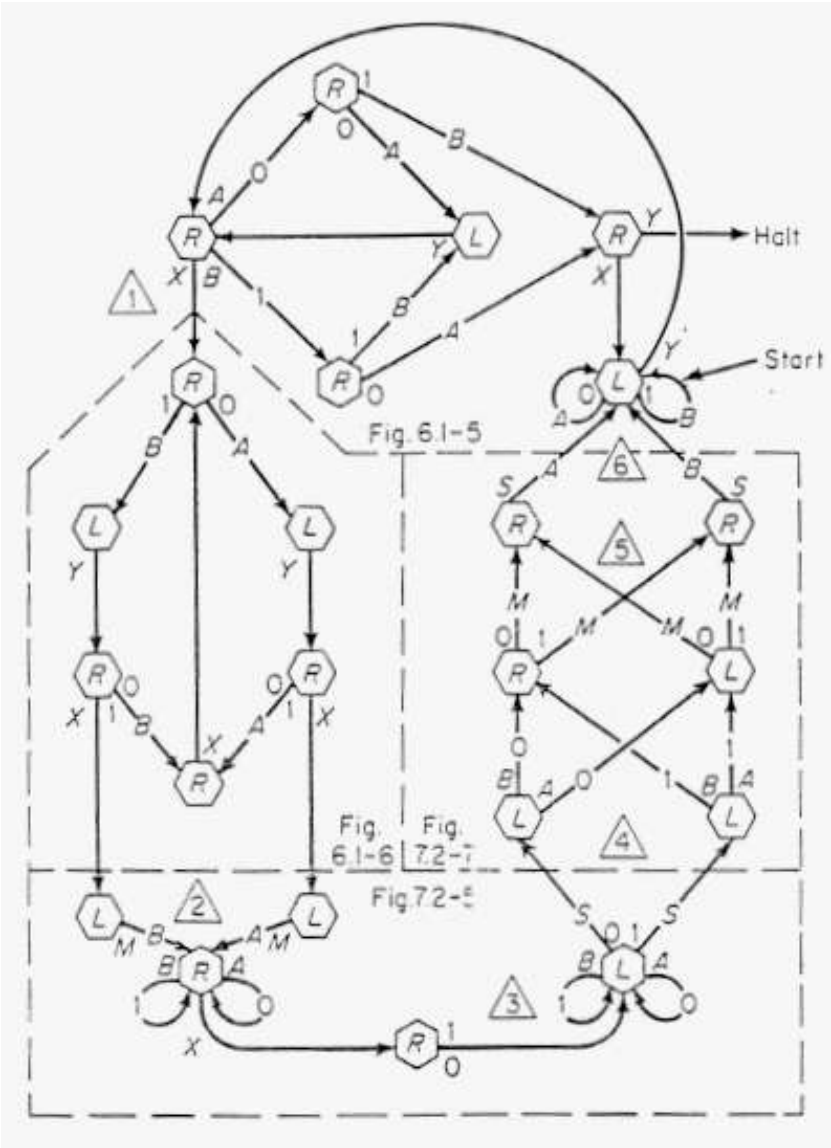


Fig. Il grafico di transizione di una macchina di Turing universale.

Turing non si limitò ad introdurre le cosiddette macchine di Turing, ma andò oltre e fece vedere che tra le diverse macchine di Turing **era possibile trovarne una in grado di "simulare" tutte le altre macchine di Turing**.

In altre, **era possibile costruire una particolare macchina, denominata in seguito *macchina di Turing universale*, capace di prendere ingresso la descrizione di una qualunque macchina di Turing (opportunamente codificata) e i dati da elaborare e di calcolare il risultato secondo simulando la macchina fornita in ingresso**.

Dal momento che una macchina di Turing è completamente definita dalla sua matrice di controllo, **Turing mostrò che era possibile codificare la matrice di controllo come una sequenza di simboli del tutto analoga a quella utilizzata per i dati di ingresso**. Tale descrizione poteva quindi essere scritta sul nastro della macchina di Turing insieme ai dati.

Una macchina di questo tipo costituisce un calcolatore generale programmabile nello stesso senso definito da Babbage con la Macchina Analitica.

Cento anni dopo il lavoro di Babbage, un altro inglese aveva riscoperto, questa volta in termini puramente teorici, il concetto di calcolatore universale.

La tesi di Turing-Church

Negli stessi anni in cui Turing introduceva le sue macchine e negli anni successivi, **altri matematici introdussero formalismi atti a descrivere procedure di calcolo in modo altrettanto rigoroso ed astratto**: Godel (1931), Post (sistemi di riscrittura, 1936), Church (lambda-calcolo, 1936), …

L'analisi di questi formalismi portò alla conclusione:

> **Nessun formalismo di calcolo può calcolare più di quello che fa la macchina universale di Turing (o il lambda-calcolo): altri modelli di calcolatore possono essere più efficienti, più veloci, più user-friendly della macchina di Turing, ma non possono calcolare funzioni che non siano calcolabili anche dalla macchina universale di Turing (o il lambda-calcolo)**.

Il primo a formulare chiaramente questa tesi, con riferimento al lambda calcolo e alle funzioni ricorsive fu Alonzo Church.

I limiti della macchina universale: l'indecidibile

Fu proprio con questa macchina che **Turing riuscì a rispondere negativamente al problema posto da Hilbert (*Entscheidungsproblem*)** trovando un problema algoritmicamente insolubile.

Per affrontare l'*Entscheidungsproblem* Turing distingue le **macchine non-circolari** (*circle-free machine*) capaci di produrre sequenze illimitate di cifre binarie (cioè che egli chiama *numero computabile*), da **quelle circolari** (*circular machine*) che non riescono in tale compito.

Mostra poi che non è possibile costruire **nessuna macchina di Turing capace di distinguere queste due tipologie di macchine** e pertanto **il problema è indecidibile**, cioè irrimediabilmente irrisolvibile.

La strategia con cui veniva raggiunto questo risultato, fra l'altro, ricalcava molto da vicino le idee applicate da Gödel nel suo grande teorema del '31. Anche in questa dimostrazione, come quella di Gödel, si può notare che viene fatto uso dell'**autoriferimento** introducendo una macchina che opera sul codice di una macchina che corrisponde a se stessa.

Oggi in tutti i testi al posto del problema originale di Turing viene presentato un altro problema, noto come ***halting problem***, spesso attribuito a Turing ma in realtà introdotto da Martin Davis e più chiaro da comprendere. In questo caso ci si chiede se sia possibile **costruire un algoritmo in grado di distinguere le MdT che si arrestano da quelle che invece procedono nel calcolo all'infinito**.

Anche in questo caso, si perviene alla conclusione che è impossibile costruire una simile macchina e pertanto il problema dell'arresto è indecidibile.

Si trova poi che a partire dall'indecidibilità del problema di Turing si deducono numerosi altri risultati limitativi per la teoria della computabilità. Ovviamente accettando la tesi di Church-Turing, si può affermare che non esiste nessuna funzione computabile in grado di risolverli.

L'interesse per il risultato di Turing non è solo di tipo tecnico-matematico, ma in realtà si collega a scenari più ampi; così John von Neumann nel 1949 commentava il risultato:

> *Si può costruire un automa [macchina] che può fare qualunque cosa fa un altro automa, ma non si può costruire un automa che predica il comportamento di un automa arbitrario. In altre parole, si può costruire un organo che fa qualsiasi cosa che può essere fatta, ma non uno che dica se può essere fatta.*

In tutte le macchine a funzionamento di tipo discreto comunemente realizzate dall'uomo la prevedibilità del comportamento è più o meno semplice; **anzi è proprio questa "prevedibilità" la costante dell'essere macchina**.

Il meccanicismo aveva assunto questa posizione di fondo e, in questa ottica, considerava il comportamento del mondo di tipo "meccanico", cioè prevedibile, come esprimeva molto chiaramente Laplace in un famoso passo dell'*Essai philosophique sur les probabilités*.

Prima la fisica quantistica con il **principio di indeterminazione di Werner Heisenberg**, 1927 e poi le macchine di Turing sgretolarono questa certezza.

Il problema di prevedere in modo completo tutte le possibili mosse di una macchina non solo è estremamente complesso, ma è teoricamente impossibile, persino quando, astraendo dal mondo reale, la macchina è regolata da semplici regole discrete e deterministiche assolutamente prive di aspetti probabilistici.